Math 203 – Analyse et convergence II
–
Examen final, 19 mai 2015

Durée : 2h ; documents et calculettes interdits.
Chaque exercice est à composer sur une feuille distincte.

Les exercices et les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté.
Il est toujours possible d'admettre la réponse à une question précédente pour traiter les suivantes.
Le barème dépassant largement 20, il n'est pas obligatoire de traiter tous les exercices.

Exercice 1 (9 points)**.** Considérons l'intégrale suivante, dépendant du paramètre $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) := \int_1^\infty \frac{\arctan(tx)}{t^2 + x^2} dt.$$

1. Prouver que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, que l'intégrale est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$).
2. Prouver que F est impaire.
3. Prouver que F est une fonction continue.
4. Prouver que F est C^1 sur $]0, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 0[$.
5. Montrer que, pour tout $x > 0$ on a
$$0 \leq \int_1^\infty \frac{\arctan(tx)}{(x^2 + t^2)^2} dt \leq \frac{\pi}{6}$$
et
$$\int_1^\infty \frac{t}{(1 + t^2x^2)(t^2 + x^2)} dt = \int_x^\infty \frac{y}{(1 + y^2)(y^2 + x^4)} dy \geq \int_x^\infty \frac{y}{(1 + y^2)(y^2 + y^4)} dy.$$
En déduire que, pour $x > 0$, on a $F'(x) \geq \int_x^\infty \frac{1}{y(1+y^2)^2} dy - \frac{\pi x}{3}$.
6. Montrer $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = +\infty$ et en déduire que F n'est pas dérivable en $x = 0$.

Exercice 2 (7 points)**.** Considérons les séries entières suivantes

$$S(x) := \sum_{n\geq 1} \sin(2^n \frac{\pi}{3}) x^n, \qquad T(x) := \sum_{n\geq 1} \sin(2^{-n} \frac{\pi}{3}) x^n.$$

1. Justifier que la suite $(\sin(2^n \frac{\pi}{3}))_{n\geq 1}$ est 2-périodique et que la suite $(\sin(2^{-n} \frac{\pi}{3}))_{n\geq 1}$ ne l'est pas.
2. Indiquer le rayon de convergence de chacune de ces deux séries.
3. Préciser l'ensemble de convergence de chacune de ces deux séries.
4. Calculer la somme $S(x)$ dans son ensemble de convergence.
5. En utilisant éventuellement l'inégalité bien connue $|\sin(t)| \leq |t|$, prouver que, sur l'ensemble de convergence de T, on a
$$|T(x)| \leq \frac{\pi |x|}{3(2 - |x|)}.$$

Attention, Exercice 3 au verso, tourner la page !

Exercice 3 (11 points)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x) = e^{ix/2}$ pour $x \in [0, 2\pi[$ et prolongée de manière 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Dessiner les graphes de la partie réelle et de la partie imaginaire de f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
2. Prouver que les coefficients c_n, coefficients de Fourier complexes de f, sont donnés par $c_n = \frac{2i}{\pi(1-2n)}$.
3. Pourquoi n'a-t-on pas $c_n = \overline{c_{-n}}$?
4. Écrire l'identité de Parseval concernant la série de Fourier de f et l'utiliser pour retrouver

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \,\text{impair}}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. En utilisant éventuellement la série de Fourier de f, déterminer

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

(cette même somme peut aisément être calculée sans passer par les séries de Fourier : vous pouvez donner la démonstration que vous préférez, ou même en donner deux).

6. En utilisant éventuellement la série de Fourier de f, déterminer

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$