UniversitéParis-Saclay
M2 MathSV et Math de l'Aléatoire
22 mars 2015

Examen d'optimisation convexe

Durée : 2h. Le barème dépasse largement 20, vous pouvez choisir quels exercices traiter.

Exercice 1 (6 points)**.** Considérer la fonction $H : \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$H(x,t) = \frac{|x|^2}{2t}.$$

Prouver que H est convexe. Définissons une extension $\tilde{H}$ de H sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ en mettant $\tilde{H}(x,0) = +\infty$ si $t \leq 0$. Calculer $(\tilde{H})^*$ et trouver la plus grande fonction convexe $\bar{H} \leq \tilde{H}$.

Prouver également que, pour tout $p > 1$, la fonction $H_p : \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$H(x,t) = \frac{|x|^p}{pt^{p-1}}$$

est aussi convexe.

Exercice 2 (10 points)**.** Considérer les fonctions $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ données par

$$f_1(x) = |x| \log(|x|) - |x|, \qquad f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } |x| \geq 1, \\ -1 & \text{si } |x| < 1, \end{cases} \qquad f_3(x) = f_2(x) + |x|^2.$$

Pour chacune de ces trois fonctions, dire si elle est

1. convexe,
2. strictement convexe et/ou elliptique,
3. C^1 et/ou C^2,
4. $C^{1,1}$ (c'est-à-dire, si son gradient est Lipschitzien).

Ensuite, fixons un vecteur $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et définissons $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $g_i(x) = f(_ix) - b \cdot x$. Prouver que pour $i = 1, 2, 3$, la fonction g_i admet un unique point de minimum sur $\mathbb{R}^n$. Trouver explicitement ce point de minimum pour $i = 1, 2$ et, pour $i = 3$, donner un algorithme pour l'approcher. Décrire en détails les étapes de cet algorithme (sous la forme $x_{k+1} = \dots$, avec des formules explicites ; si des paramètres sont à choisir, dire comment les choisir). Donner aussi une estimation de la vitesse de convergence.

Exercice 3 (6 points)**.** Soit $K \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble défini par

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0,\, y^2 \leq 3x^2,\, x^2 + y^2 \leq 1,\, z^2 \leq 1\}.$$

Dire si K est convexe, le dessiner (dans la mesure du possible) et donner une expression explicite, en distinguant éventuellement des cas, pour la projection P_K sur K.

Exercice 4 (5 points)**.** Trouver le problème dual du problèm de minisation suivant

$$\min \left\{ \frac{1}{p}|x|^p - c \cdot x \;:\; x \in \mathbb{R}^n,\, a \cdot x = t \right\},$$

où $p > 1$ est un exposant donné, a et c sont deux vecteurs fixés de $\mathbb{R}^n$, t est un réel donné, et $|x|$ représente la norme éuclidienne du vecteur x.