UniversitéParis-Saclay
M2 MathSV et Math de l'Aléatoire
5 novembre 2015

Examen d'optimisation convexe

Durée : 2h. Le barème dépasse largement 20, vous pouvez choisir quels exercices traiter.

Exercice 1 (7 points)**.** Considérer la fonction $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$H(x) = \frac{|x|^3}{3} + \frac{|x|^2}{2}.$$

Calculer H^*, et trouver des exposants $\alpha, \beta > 0$ tels que $H^*(y)/|y|^\alpha$ ait une limite positive et finie lorsque $y \to 0$ et $H^*(y)/|y|^\beta$ ait une limite positive et finie lorsque $|y| \to \infty$.

Peut-on toujours affirmer que, lorsque $H(x) = a|x|^p + b|x|^q$ avec $1 < p < q$ et $a, b > 0$, alors on a bien que $H^*(y)/|y|^{p'}$ a une limite positive et finie lorsque $y \to 0$ et $H^*(y)/|y|^{q'}$ a une limite positive et finie lorsque $|y| \to \infty$, où p' et q' sont les exposants conjugués de p et q, respectivement ?

Exercice 2 (7 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{|x|^2}{2} + \cos(|x|).$$

1. Prouver que f est une fonction convexe.
2. Est-elle strictement convexe ?
3. Est-elle elliptique ?
4. ∇f est-il Lipschitzien ?
5. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = f(x) - b \cdot x$. Prouver que g admet un unique point de minimum sur $\mathbb{R}^n$.
6. Donner une estimation de la vitesse de convergence de l'algorithme de gradient à pas fixe pour g.
7. Prouver que, si $|b| < 2\pi - 1$, alors la vitesse est exponentielle, au moins à partir d'un certain rang.

Exercice 3 (6 points)**.** Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble défini par $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x_1|, |x_2| \leq 1\}$ et P_1, P_2, P_3 et P_4 les points de cordonnés $(\pm 1, \pm 1)$. Soit $B_i = B(P_i, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, ||x - P_i|| < 1\}$ et $A = K \setminus \bigcup_{i=1}^4 B_i$.

1. Prouver que A est compact.
2. A est-il convexe ?
3. Soit $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ donné : prouver que le problème $\min\{|x - \hat{x}| \,:\, x \in A\}$ admet au moins une solution.
4. Qui sont les points $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ tels que cette solution est unique ?

Exercice 4 (8 points)**.** Soit $A \in M^{n\times n}$ une matrice symétrique $n \times n$, pas forcément définie positive, et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur donné. On dénote λ_1 la plus petite valeur propre de A. Considérons le problème de minimisation

$$(P) \qquad \min\{\frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x \,:\, x \in B_1\},$$

où $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| \leq 1\}$ est la boule unité.

1. Prouver que ce problème admet une solution ;
2. Prouver que si $x_0 \in B_1$ est une solution de ce problème alors il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que $Ax - b + \lambda x = 0$ et $\lambda(|x|^2 - 1) = 0$;
3. Prouver que si $x_0 \in B_1$ est tel qu'il existe un réel $\lambda \geq -\lambda_1$ avec $Ax - b + \lambda x = 0$ et $\lambda(|x_0|^2 - 1) = 0$ alors x_0 est une solution du problème (P) ;
4. Prouver que si $x_0 \in B_1$ est une solution de ce problème alors le réel λ de la question 2 est supérieur ou égal à $-\lambda_1$.