Université Paris-Saclay
M2 MathSV
13 décembre 2016

Examen d'optimisation et simulation numérique
–
Optimisation convexe

Exercice 1. Étant donnés $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$, considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \lambda_+[x]_+ + \lambda_-[x]_-,$$

où $[x]_+ := \max\{0, x\}$ et $[x]_- := \max\{0, -x\}$ désignent la partie positive et la partie négative de x, respectivement.

1. Prouver que f est convexe si et seulement si $\lambda_+ + \lambda_- \geq 0$.
2. On supposera dorénavant $\lambda_+ + \lambda_- \geq 0$. Trouver $\partial f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et calculer f^*.
3. Considérer la fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_i f(x_i)$. Calculer $\partial F(x)$ et F^*.
4. Étant donnée une matrice $A \in M^{k\times n}$ et un vector $b \in \mathbb{R}^k$, considérer le problème

   $$(P) \qquad \min\{F(x) \,:\, x \in \mathbb{R}^n,\, Ax = b\}.$$

   En supposant $\lambda_+, \lambda_- > 0$ et $b \in Im(A)$, prouver que le problème (P) admet une solution.
5. Écrire le problème dual de (P) en termes de la matrice A^t.
6. Considérer maintenant le problème

   $$(Q) \qquad \min\{F(x) + ||Ax - b||^2 \,:\, x \in \mathbb{R}^n\},$$

   qui est une version relaxée de (P) (au lieu d'imposer $Ax = b$ on veut que Ax ne diffère pas trop de b ; on abandonne l'hypothèse $b \in Im(A)$). Supposant encore $\lambda_+, \lambda_- > 0$, prouver que le problème (Q) admet une solution.
7. Supposant $\lambda_+ = \lambda_- = 0$, prouver que le problème (Q) admet aussi une solution, et que l'ensemble des solution est de la forme $x_0 + N(A)$ où $N(A)$ est le noyau de A dans $\mathbb{R}^n$, et $Ax_0 = P_{Im(A)}(b)$.
8. Donner les itérations, avec des formules explicites et une description détaillée, d'un algorithme de type ISTA pour résoudre (Q) dans le cas $\lambda_+, \lambda_- > 0$.
9. Faire de même pour la variante FISTA du même algorithme.
10. Supposant $\lambda_+ > 0$ et $\lambda_- = 0$, et supposant que les coefficients de la matrice A sont tous strictement positifs, prouver que (Q) admet une solution.