UniversitéParis-Saclay
M2 MathSV et Math de l'Aléatoire
Octobre 2015

Exercices d'optimisation convexe

Exercice 1. Considérer les ensembles

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, |x+y| \le 1\} \quad \text{et} \quad B = \overline{B(0,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \le 1\}.$$

1. Dessiner A, B et $A \cap B$. A et B sont-ils convexes ?
2. Écrire une formule pour la projection sur $A \cap B$, du type $P_{A\cap B}(x,y) = \dots$, en distinguant éventuellement des cas (il suffit de la justifier avec un dessin).
3. Lesquelles des relations suivantes sont-elles vraies ?

$$P_{A\cap B} = P_A \circ P_B, \quad P_A \circ P_B = P_B \circ P_A, \quad P_{A\cap B} = P_{A\cap B} \circ P_B.$$

Exercice 2. Considérer le problème

$$\min\{J(f) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2} f'(t)^2 + tf(t) + \frac{1}{2} tf(t)^2\right] dt\, ; \; f \in \mathcal{A}\}, \quad \text{où} \quad \mathcal{A} := \{f \in C^1([0,1]) \; : \; f(0) = 0\},$$

qui n'est pas évident à résoudre explicitement. Suggérer une discrétisation et une méthode numérique pour le résoudre de manière approchée. Écrire précisément la fonction qu'on veut minimiser dans la discrétisation (avec les matrices et/ou les vecteurs qui apparaissent dans cette fonction) et expliquer la méthode que vous choisissez d'utiliser.

Exercice 3. Considérons un échiquier 8×8 standard. Dans cet ćhiquier il ya 64 cases carrées et 144 segments qui constituent soit le bord entre deux cases adjacentes, soit des portions de bord de l'échiquier. On indiquera avec l'indice k les cases, et avec l'indice i les segments. Pour une case k donnée, $i = N(k), E(k), S(k), O(k)$ représentent les quatre segments (au nord, est, sud et ouest, respectivement) de bord de cette case. Dans chaque case on va écrire un nombre f_k (qu'on considère donné) et sur chaque bord un nombre w_i (qui est notre inconnue). Sur les segments qui sont sur le bord de l'équiquier (c'est-à-dire les i tels qu'il existe k avec $i = N(k)$ mais pas k' avec $i = S(k')$, et de même pour les autres points cardinaux), on écrit forcement $w_i = 0$ (c'est une contrainte). On met également la contrainte que pour chaque k on ait $w_{N(k)} - w_{S(k)} + w_{E(k)} - w_{O(k)} = f_k$.

Considérer le problème de minimisation

$$\min \left\{ \sum_i \frac{1}{p} |w_i|^p \; : \; w \text{ satisfait les contraintes} \right\}.$$

Prouver que le problème est convexe, qu'il admet une solution, et trouver son dual.

Quel serait le correspondant "continue" de ce problème ?

Exercice 4. Soit $L : \mathbb{R}^n \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction C^1, avec $L(x,y) \ge f(x) - C(y)$, où f est coercive ($\lim_{|xto\infty} f(x) = +\infty$) et C est localement bornée. Soit $G(y) := \min_x L(x,y)$. Supposons qu'un certain y_0 est tel que le minimum dans la définition de $G(y_0)$ est atteint en un point unique x_0. Prouver que $\nabla G(y_0) = \nabla_y L(x_0, y_0)$. Appliquer ce résultat pour prouver que h^* est C^1, et calculer son gradient, dès que h est strictement convexe et telle que $\lim_{|xto\infty} h(x)/|x| = +\infty$. Expliquer où toutes les hypothèses sont utilisées.