Polytech' Paris-Sud 2011–2012
Orsay S1-Maths

Test de Janvier 2012

1. — Faux. Il faudrait des propriétés de symétrie pour pouvoir se ramener à $[0, T/2]$. On va construire un contre exemple (mais on pourrait en trouver bien d'autres). On définit deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 2\pi]$ et on les prolonge par périodicité :

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si } 0 \leq t < \pi\,; \\ \frac{2}{\pi}\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

et

$$y(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{si } 0 \leq t < \pi\,; \\ 0 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

La figure 1 représente en trait plein la courbe pour $t \in [0, \pi]$ et en pointillés la courbe pour $t \in [-\pi, 0]$.

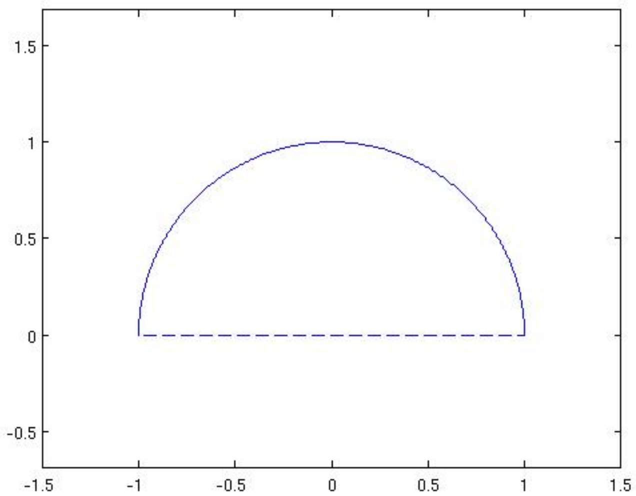

Figure 1. Courbe de l'exercice 1

2. — Vrai. Pour tous a, b réels, les points (a, b) et (b, a) sont symétriques par rapport à la droite $x = y$.

Soit (x_0, y_0) un point de la courbe γ. Cela veut dire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma(t) = (x_0, y_0)$. Mais alors $\gamma(-t) = (x(-t), y(-t)) = (y(t), x(t)) = (y_0, x_0)$ est aussi dans la courbe γ, et, par la remarque initiale, est le symétrique de (x_0, y_0).

3. — Faux. Tout ce que l'on peut affirmer, c'est que la courbe associée est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = -x$. On va donner un contre-exemple. Posons $x(t) = (t + |t|)/2$ et $y(t) = (t - |t|)/2$. Alors pour tout réel t, $x(-t) = -y(t)$ et $y(-t) = -x(t)$. Mais la courbe associée n'est pas symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ puisqu'elle contient $(1, 0)$ (image de $t = 1$) et pas $(0, 1)$ (puisque pour tout réel t, $y(t) \leq 0$).

4. — Faux. On a $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ et $\Gamma_2 = \Gamma_3$.

Montrons $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$. Si $t \in]\pi, \pi[$, $x(t) = \cos(t) > -1$, donc le point $(-1, 0)$ n'appartient pas à Γ_2. Or $(-1, 0) = \gamma_1(\pi) \in \Gamma_1$.

Montrons $\Gamma_2 = \Gamma_3$. Soit $t \in]-\pi, \pi[$. Posons $s = \tan(t/2)$. Alors

$$\cos(t) = \frac{1-s^2}{1+s^2} \text{ et } \sin(t) = \frac{2s}{1+s^2}.$$

Ainsi, $\gamma_2(t) = \gamma_3(s) \in \Gamma_3$. On a donc montré que $\Gamma_2 \subset \Gamma_3$.

Soit maintenant $t \in \mathbb{R}$. On pose $s = 2\arctan(t)$. Alors s appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi[$,

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(s) \text{ et } \frac{2t}{1+t^2} = \sin(s).$$

Ainsi, $\gamma_3(t) = \gamma_2(s) \in \Gamma_2$. On a montré que $\Gamma_3 \subset \Gamma_2$.

5. — Faux. Pour tout $t < 0$, $x(t) = -t$ et $y(t) = t$, donc $x(t) \neq y(t)$, c'est-à-dire que le point $(x(t), y(t))$ n'appartient pas à la droite d'équation $y = x$.

6. — Vrai. Pour tout réel t, la distance du point $(x(t), y(t))$ au point $O = (0, 0)$ est donnée par

$$\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{e^{2t}(\cos(t))^2 + e^{2t}(\sin(t))^2} = e^t.$$

Or, la fonction exponentielle est injective. Ainsi, si les réels t et t' sont distincts, les points $(x(t), y(t))$ et $(x(t'), y(t'))$ ne sont pas à la même distance de O, ils sont donc différents. La courbe ne peut donc pas avoir de point multiple.

7. — Vrai. Cet énoncé est volontairement donné de façon un peu imprécise. Ce que l'on demande, c'est s'il est possible d'associer à chaque lettre de l'alphabet un segment I de $\mathbb{R}$ et une fonction $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, continue, telle que l'ensemble $\{ \gamma(t) \mid t \in I \}$ soit un « dessin » de la lettre.

C'est possible, puisque l'on peut dessiner toutes les lettres de l'alphabet en utilisant des segments de droite et des arcs de cercle, et que l'on peut toujours « recoller » des morceaux de courbes paramétrées pour en faire une courbe unique.

Illustrons ce principe de construction sur la lettre « L ». On pose $I = [0, 2]$ et $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1]\,; \\ t & \text{si } t \in]1,2]. \end{cases}$$

et

$$y(t) = \begin{cases} 1-t & \text{si } t \in [0,1]\,; \\ 0 & \text{si } t \in]1,2]. \end{cases}$$

On obtient le tracé de la figure 2.

Pour la lettre « D », on pose $I = [0, 2]$ et $\gamma(t) = (x(t), y(t)$ avec

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1]\,; \\ -\frac{1}{2}\sin(\pi t) & \text{si } t \in]1,2]. \end{cases}$$

et

$$y(t) = \begin{cases} 1-t & \text{si } t \in [0,1]\,; \\ \frac{1}{2}(1+\cos(\pi t)) & \text{si } t \in]1,2]. \end{cases}$$

On obtient le tracé de la figure 3.

8. — Faux. On va donner un contre-exemple. Soit un réel $a > 0$. Posons $x(t) = e^{-t}\sin(at)$ et $y(t) = e^{-t}\cos(at)$. Alors

$$O\gamma(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{e^{-2t}(\sin(t))^2 + e^{-2t}(\cos(t))^2} = e^{-t} \leq 1.$$

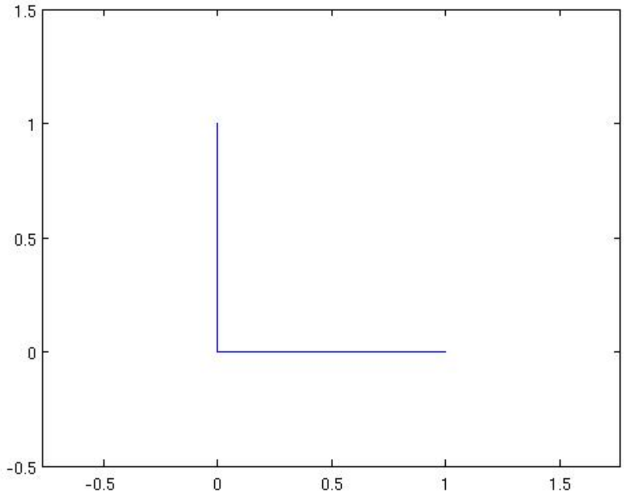

FIGURE 2. Lettre « L »

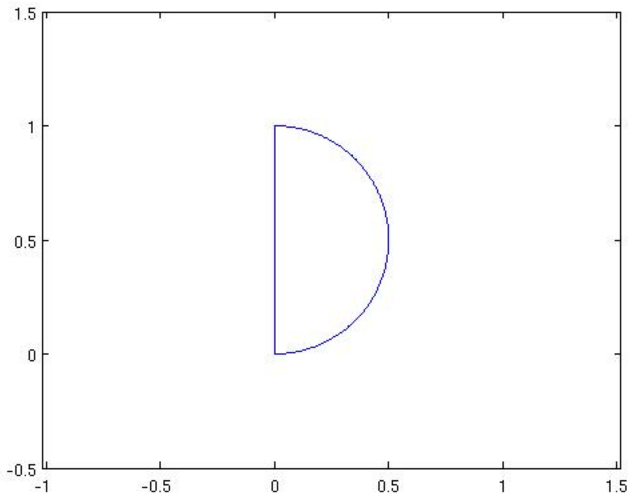

FIGURE 3. Lettre « D »

La courbe est donc contenue dans le disque de centre O et de rayon 1. Notons l la longueur de la courbe associée à γ. Alors

$$l = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

Or, $x'(t) = -ae^{-t}\sin(at)$ et $y'(t) = e^{-t}\cos(at)$, donc $\|\gamma'(t)\| = ae^{-t}$. Finalement,

$$l = \int_0^1 ae^{-t} dt = [-ae^{-t}]_0^1 = a(e-1).$$

Il suffit de choisir $a > 2\pi/(e-1)$ pour obtenir un contre-exemple. On remarque que, sur cet exemple, on augmente la longueur de la courbe en tournant un plus grand nombre de fois autour du point $O = (0,0)$.

9. — Vrai. L'hypothèse faite sur la vitesse instantanée se traduit par l'inégalité $\|\gamma'(t)\| \leq 1$. Notons l la distance parcourue entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Alors

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt \leq \int_{t_0}^{t_1} 1 dt = t_1 - t_0 = 1.$$

10. — Vrai. La distance parcourue est égale à l'intégrale de t_0 à t_1 du module de la vitesse. Calculons ainsi le carré de ce module.

Tout d'abord, $v(t) = (x'(t), y'(t))$, donc $v^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2$. On a

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos(\theta(t)) \\ x'(t) &= r'(t)\cos(\theta(t)) + r(t)\cos'(\theta(t))\theta'(t) \\ &= r'(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\sin(\theta(t))\theta'(t). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} y(t) &= r(t)\sin(\theta(t)) \\ y'(t) &= r'(t)\sin(\theta(t)) + r(t)\cos(\theta(t))\theta'(t) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x'(t)^2 &= r'(t)^2\cos(\theta(t))^2 - 2r'(t)\cos(\theta(t))r(t)\sin(\theta(t))\theta'(t) + r(t)^2\sin(\theta(t))^2\theta'(t)^2 \\ y'(t)^2 &= r'(t)^2\sin(\theta(t))^2 + 2r'(t)\sin(\theta(t))r(t)\cos(\theta(t))\theta'(t) + r(t)^2\cos(\theta(t))^2\theta'(t)^2 \\ v(t)^2 &= r'(t)^2(\cos(\theta(t))^2 + \sin(\theta(t))^2) + r(t)^2(\sin(\theta(t))^2 + \cos(\theta(t))^2)\theta'(t)^2 \\ &= r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2. \end{aligned}$$

Donc on a bien la formule indiquée.

11. — Faux. On a $\frac{x-2}{3} = \cos(t)$ et $\frac{y}{2} = \sin(t)$, donc sommant leurs carrés on obtient

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

qui après simplification donne $4x^2 - 16x + 9y^2 = 36 - 16 = 20$.

Par ailleurs, la courbe donnée est une ellipse, de même que la fausse équation $x^2 - 4x + 9y^2 = 20$.

On peut aussi vérifier directement que le point $(5, 0)$, image de $t = 0$, ne vérifie pas l'équation cartésienne.

12. — Faux. Si f était C^1, alors sa restriction à $\mathbb{R} = \{ (x, 0), x \in \mathbb{R} \}$ serait aussi C^1. Or, la restriction de f est $f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.

13. — Vrai. C'est une conséquence du résultat général de composition des fonctions C^k, $k \geq 1$. La fonction f est égale à $g \circ h$, avec

$$h: \begin{array}{ccc} D & \to &]0, +\infty[\\ (x, y) & \mapsto & x^2 + 2y^2 - 1 \end{array}$$

une fonction de classe C^2 (et même C^∞) sur D (puisqu'il s'agit d'une fonction polynomiale), et

$$g: \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \sqrt{z} \end{array}$$

une fonction de classe C^2 (et même C^∞) sur $]0, +\infty[$. La composée de deux fonctions de classe C^2 est de classe C^2.

14. — Faux. Pour $t \in [0, 1]$, on note $g(t)$ la température de l'avion à l'instant t. Alors $g = f \circ \gamma$, et donc, par composition, g est une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.

Pour tout $t \in [0,1]$, on a par la formule de dérivation des fonctions composées

$$g'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Comme par hypothèse $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle < 0$ pour tout $t \in [0,1]$, la fonction g est strictement décroissante sur $[0,1]$. La température de l'avion à l'instant 0 est donc strictement supérieure à celle à l'instant 1.

15. — Vrai. Il suffit de définir g par $g(x,y) = y - f(x)$. On sait que les projections $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont des fonctions de classe C^∞ car polynomiales. Comme f est de classe C^1, la fonction $(x,y) \mapsto f(x)$ est de classe C^1 par composition. Ainsi, g est de classe C^1 comme différence de fonctions C^1.

La ligne de niveau 0 de g est l'ensemble

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0 \right\}.$$

Il est égal à l'ensemble

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \right\},$$

c'est à dire au graphe de f.

Enfin, un calcul montre que $\nabla g(x,y) = (f'(x), 1)$ qui n'est jamais nul.

16. — Vrai.

Calculons les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x+y) - \sin(x-y) + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x+y) + \sin(x-y) - x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(x+y) - \cos(x-y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos(x+y) - \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos(x+y) + \cos(x-y) + 1.$$

En $(0,0)$ on a alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

Comme $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1 - 4 = -3 < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, il s'agit d'un maximum local.

17. — Faux. Comme $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ pour t proche de zéro, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 - \frac{(x+y)^2}{2} + 1 - \frac{(x-y)^2}{2} + xy + o(x^2+y^2) \\ &= 1 - x^2 - y^2 + xy. \end{aligned}$$

18. — Faux. On a $f(x,y) \to +\infty$ quand $x^2 \to \infty$ ou $y^2 \to \infty$ car $2 - \cos$ est toujours positive. Ainsi, il existe M tel que $f(x,y) > 2f(0,0)$ si $x^2 > M$ et de même $f(x,y) > 2f(0,0)$ si $y^2 > M$. Par le théorème de Weierstrass, f admet un minimum sur le compact (un carré)

$$C = \{ (x,y) \mid x^2 \leq M \text{ et } y^2 \leq M \}.$$

Ce minimum est atteint en (x_0, y_0), et satisfait

$$f(x_0, y_0) \leq f(0,0)$$

puisque $(0,0)$ est dans C.

C'est donc le minimum global de f, puisqu'en dehors de C la fonction est toujours supérieure à $2f(0,0)$.

19. — Faux. On remarque que les points $(-2, t)$ appartiennent tous à E pour $-2 \leq t \leq 2$, puisqu'alors

$$(x - y) = -2 - t < 0$$
$$(x + y) = -2 + t < 0$$

donc $|x - y| + |x + y| = -(x - y) - (x + y) = -x + y - x - y = -2x = 4$.

Or, un segment vertical n'est jamais le graphe d'une fonction.

20. — Faux.

Voyons que E est un cercle centré en l'origine. Tout d'abord, $|t|^2 = t^2$ pour tous les t réels, donc on a

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - y)^2 + (x + y)^2 = 16 \} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 8 \}.$$

Si en un point (x_0, y_0) de E il existe une fonction $\phi(x)$ telle que E coïncide avec le graphe de ϕ proche de (x_0, y_0), alors la normale à E est perpendiculaire à $(1, \phi'(t))$ au point $(t, \phi(t))$.

Comme au point $(2\sqrt{2}, 0)$ le gradient de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8$ est $(4\sqrt{2}, 0)$, qui est aussi le vecteur normal à E, il n'est pas possible de trouver une fonction ϕ car cela nécessiterait $\langle (1, \phi'(t)), (4\sqrt{2}, 0) \rangle = 0$.