Université Paris-Sud — **L2 – MPI**
Mathématiques — **2^{e} semestre 2015-2016**

Math203 – Analyse et Convergence II
Feuille d'Exercices 1

Exercice 1.1.— Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble où la suite de fonctions (f_n) converge simplement

a) $f_n(x) = x^n$ b) $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ c) $f_n(x) = n^x$ d) $f_n(x) = x^n e^n$

e) $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$ f) $f_n(x) = n\sin(\frac{x}{n})$ g) $f_n(x) = n^2(\cos(\frac{x}{n}) - 1)$

Exercice 1.2.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n^2}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.
2. Pour $n \geq 1$ quelconque fixé, dresser le tableau de variations de la fonction f_n.
3. Est-ce que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$? Même question sur $[0, a]$ avec $a > 0$?

Exercice 1.3.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f (préciser f).
2. Pour $n \geq 1$, dresser le tableau de variations de la fonction f_n.
3. Pour quels $a \in \mathbb{R}^+$ la suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

Exercice 1.4.— Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$.

Exercice 1.5.— Soit $\alpha > 0$. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ (discuter selon α).

Exercice 1.6.— Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur l'intervalle I.

1. Montrer que si chaque f_n est bornée sur I et si la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f, alors f est bornée sur I.
2. Donner un exemple de suite (f_n) de fonctions bornées sur un intervalle I admettant une limite simple f non bornée sur I.

Exercice 1.7.— Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément sur l'intervalle I vers une fonction continue f et soit (x_n) une suite d'éléments de I qui converge vers $x \in I$. Montrer qu'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$. Est-ce toujours le cas si (f_n) converge seulement simplement ?

Exercice 1.8.— Soit $\alpha > 0$ et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^\alpha x^2}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f (préciser f).
2. Calculer $f_n(\frac{1}{n})$. En déduire que si $\alpha \leq 2$ la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que si $\alpha > 2$ la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. *(Indication : étant donné un réel $\beta \geq 1$, majorer $|f_n|$ sur $[0, \frac{1}{n^\beta}]$ et sur $[\frac{1}{n^\beta}, +\infty[$, puis fixer convenablement β.)*