Université Paris-Sud
Mathématiques

L2 – MPI
2^{e} semestre 2015-2016

Math203 – Analyse et Convergence II
Feuille d'Exercices 3

Exercice 3.1.— Comparer les rayons de convergence R_1 et R_2 des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum a_n x^{2n}$.

Exercice 3.2.— On suppose que la suite (a_n) tend vers 0 et que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

Exercice 3.3.— Etant donnés une suite (a_n) et un réel α quelconques, montrer que les rayons de convergence R et R' des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n^\alpha a_n x^n$ sont égaux.

Exercice 3.4.— Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} x^{2n+1}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (2^n - n) x^n$ 4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\sqrt{n}} x^n$ 5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^{n!}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ 7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\tan(\tfrac{1}{n}) - \sin(\tfrac{1}{n})) x^n$ 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \begin{cases} n2^n & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Exercice 3.5.— Donner le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ 2. $x \mapsto \ln(1-x)$ 3. $x \mapsto \ln(1+x)$ 4. $x \mapsto e^x$
5. $x \mapsto \cos(x)$ 6. $x \mapsto \sin(x)$ 7. $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ 8. $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$.

Dans chaque cas, préciser le rayon de convergence et le domaine de convergence de la série.

Exercice 3.6.— Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

1. Quel est son domaine de définition ?
2. La fonction f est-elle continue ?
3. Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$. Calculer f' et en déduire une expression de f.
4. Prouver l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3.7.— Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Déterminer le domaine de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n3^n}$.
2. Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \frac{x-2}{x^3-x^2-x+1}$ au voisinage de 0 en utilisant une décomposition en éléments simples. Donner le domaine de convergence de la série obtenue.
3. Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$ puis calculer sa somme.
4. Soit a un réel > 0. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \mathrm{ch}(na)\frac{x^n}{n}$.

   Calculer sa somme en évaluant d'abord la série dérivée.

Exercice 3.8.— Montrer qu'il existe une unique série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ qui vérifie la condition $f(0) = 1$ et qui est solution de l'équation différentielle

$$xy''(x) + 3y'(x) - x^3 y(x) = 0.$$

Déterminer son rayon de convergence.

Exercice 3.9.— Etant donné un réel $\alpha \neq 0$, soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \qquad (1+x)f'(x) = \alpha f(x).$$

1. Montrer que si f_1 et f_2 sont deux solutions de $(\mathcal{E})$ définies sur un intervalle I inclus dans $]-1, +\infty[$ et si f_2 ne s'annule pas alors $\frac{f_1}{f_2}$ est constante sur I.
2. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$ définie au voisinage de 0 et telle que $f(0) = 1$. Montrer que si f est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence :

   $$(\mathcal{R}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)a_{n+1} = (\alpha - n)a_n.$$

   Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dont les coefficients sont définis par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence $(\mathcal{R})$.
3. En déduire le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ au voisinage de 0.

Exercice 3.10.— Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. Montrer que si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et on a

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Indication : poser $\mathcal{R}_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ et utiliser pour $p \leq q$ la relation

$$\sum_{n=p}^{q} a_n x^n = \sum_{n=p}^{q} (\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n+1})x^n = \mathcal{R}_p x^p + \sum_{n=p+1}^{q} \mathcal{R}_n(x^n - x^{n-1}) - \mathcal{R}_{q+1}x^q$$

pour montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 3.11.—

1. Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Montrer que f est de classe C^∞ sur un voisinage de 0, et que les coefficients a_n de la série entière vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

   Montrer que f est C^∞. Est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

3. Soit $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On suppose qu'il existe $M > 0$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ tels que l'on ait

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f^{(n)}(x)| \leq \lambda\, n!\, M^n.$$

   Montrer que f se développe en série entière au voisinage de l'origine.