Math203 – Analyse et Convergence II
Feuille d'Exercices 4

Exercice 4.1.— Soit F la fonction définie pour tout $x > 0$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2 + x}\cdot$

1. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée de deux manières différentes.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $I(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + x)^2}$ si $x > 0$, en particulier celle de $I(1)$.
3. Proposer une méthode pour calculer l'intégrale $J := \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + 1)^3}\cdot$

Exercice 4.2.— Montrer que la fonction F définie pour tout x dans $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(tx)}{t + x^2}\,dt$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donner une expression de $F'(x)$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x)$.

Exercice 4.3.— Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2}\,dt \qquad \text{et} \qquad G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 .$$

1. Montrer que les fonctions F et G sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'on a
$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad F'(x) + G'(x) = 0\,.$$
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 4.4.— Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(tx)}{t^2 + 1}\,dt\cdot$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ puis qu'elle est dérivable. Calculer $F'(x)$.
2. Etablir pour tout x dans $\mathbb{R}$ la relation
$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \left(\frac{1}{(2n)!}\int_0^1 \frac{t^{2n}}{t^2 + 1}\,dt\right)$$
et en déduire que F est de classe C^∞.

Exercice 4.5.— Montrer que la fonction F définie pour x dans $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \sin\left(\frac{x}{t}\right) dt$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.6.— Soit Γ (Gamma) la fonction définie par $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ.
2. Montrer que pour tout x dans $\mathcal{D}$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.
3. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et expliciter Γ'.

Exercice 4.7.— Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$.

1. Vérifier que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser F'.
3. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer F' puis F.
4. En déduire une expression simple de $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

Exercice 4.8.— Ici on note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont continues et telles que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge. Pour chaque f dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on définit la fonction $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}\,dt\,.$$

1. Vérifier que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle est continue. Vérifier aussi que l'application $\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}(f)$ est $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
2. Pour $a > 0$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(t) = e^{-at^2}$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.
   – Justifier que $\mathcal{F}(f_a)$ est bien définie.
   – Montrer que $\mathcal{F}(f_a)$ est solution de l'équation différentielle $2ay'(x) + xy(x) = 0$.
   – Déterminer $\mathcal{F}(f_a)$.
3. À partir de ce qui précède :
   – déduire que les fonctions $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $x \mapsto xe^{-\frac{x^2}{2}}$ sont des vecteurs propres de $\mathcal{F}$,
   – déterminer une expression simple de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,dx$ lorsque $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Quelques exercices supplémentaires, plus théoriques et/ou difficiles :

Exercice 4.9.— On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \quad \text{et} \quad g(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,dt\,.$$

a) Après avoir justifié que les fonctions f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}^+$, montrer qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qu'elles vérifient l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.
b) Montrer que f et g sont continues en 0.
c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Exercice 4.10.— Pour $x, t \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x,t) = e^{-xt}\mathrm{sinc}(t)$ où sinc (lire sinus cardinal) est la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ prolongée par continuité en 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x,t)\,dt$.
a) Montrer que $u_n(x) = (-1)^n \int_0^{\pi} g_n(x,u)\,du$ pour une certaine fonction g_n que l'on déterminera.
b) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
c) On pose $U(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Justifier que U est continue sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer U sous la forme d'une intégrale convergente.
d) Montrer que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $U'(x)$.
e) Expliciter $U(x)$ pour $x > 0$ puis la valeur de $U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.