Math203 – Analyse et Convergence II
Feuille d'Exercices 5

Exercice 5.1.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique continue par morceaux. Que peut-on dire des coefficients de Fourier de f dans chacun des quatre cas suivants

cas n°1 : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)$
cas n°2 : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x)$
cas n°3 : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x+\pi) = f(x)$
cas n°4 : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x+\pi) = f(-x)$

Exercice 5.2.— Déterminer la série de Fourier et la somme de la série de Fourier de chacune des six fonctions 2π-périodiques définies par

1) $\forall\, x \in [0, 2\pi[, \quad f_1(x) = \pi - x$
2) $\forall\, x \in [0, 2\pi[, \quad f_2(x) = (\pi - x)^2$
3) $\forall\, x \in [0, 2\pi[, \quad f_3(x) = x \sin(\frac{x}{2})$
4) $\forall\, x \in [-\pi, \pi[, \quad f_4(x) = \pi - |x|$
5) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_5(x) = |\sin(x)|$
6) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_6(x) = |\sin(x)|^3$

Exercice 5.3.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{si } x \in\,]0, 2\pi[.$$

1) Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-5\pi, 5\pi]$.
2) Calculer les coefficients de Fourier de f.
3) Montrer que pour tout réel x, on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}\cdot$$

4) En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cdot$$

Exercice 5.4.—
1) Déterminer les séries de Fourier des fonctions impaires 2π-périodiques f_1, f_2, f_3 définies par

$$\forall\, x \in\,]0, \pi[, \quad f_1(x) = \sin(\tfrac{x}{2}), \quad f_2(x) = \mathrm{sh}(x), \quad f_3(x) = \cos(x).$$

2) Préciser la somme de chacune des séries de Fourier ainsi obtenues.

Exercice 5.5.— Soit a un réel non entier et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall\, x \in \ ]-\pi, \pi] , \quad f(x) = e^{iax}.$$

En utilisant l'identité de Parseval, établir la relation

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(a-n)^2}.$$

Exercice 5.6.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π-périodique définie par

$$f(0) = 0, \qquad f(x) = 1 \ \text{ si } x \in \,]0, \tfrac{\pi}{2}], \qquad f(x) = 0 \ \text{ si } x \in \,]\tfrac{\pi}{2}, \pi].$$

1) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\big((2n+1)x\big) = 1.$$

2) Prouver l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 5.7.— Soit a un réel non nul.

1) Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = e^{ax}$.
2) En appliquant l'identité de Parseval, déterminer la valeur de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a}{n^2+a^2}$.
3) En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ en effectuant un passage à la limite qu'on justifiera.
4) Déterminer $\lim\limits_{a\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a}{a^2+n^2}$.

Exercice 5.8.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire 2π-périodique définie par

$$\forall\, x \in \ [0, \pi], \quad f(x) = \pi - 2x,$$

et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire 2π-périodique définie par :

$$\forall\, x \in \,]0, \pi], \quad g(x) = x(\pi - x).$$

1) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2) Prouver que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
3) En déduire le développement en série de Fourier de la fonction g.
4) A l'aide des résultats précédents et de l'identité de Parseval, retrouver la valeur des sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 5.9.— Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ et $f(0) = f(2\pi)$.

1) A l'aide de l'identité de Parseval, démontrer que l'on a

$$\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt \leq \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt. \quad (1)$$

2) Pour quelle(s) fonction(s) f les deux membres de (1) sont-ils égaux ?