ENSAE
Examen d'Optimisation Dynamique

Durée : 2 heures
Aucun document n'est autorisé
Ce sujet se compose d'une seule page

Exercice 1 (7 points)**.** Considérer le problème de contrôle suivant

$$\max \int_0^T x(t)u(t)dt \quad : \quad x'(t) = x(t) - x(t)u(t), \quad u(t) \in [0, U], \quad x(0) = x_0 > 0,$$

où les valeurs de T et de U sont fixées de telle sorte que $U < 1$ et $Ue^{(1-U)T} \leq 1$.

a) Ecrire l'Hamiltonien du système et le système Hamiltonien résolu par (x, p).
b) Trouver la solution de ce système. La courbe $x(t)$ est alors un candidat à l'optimisation. Préciser le contrôle u qui lui correspond.
c) Écrire l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman associée au problème (celle qui est satisfaite par la fonction valeur) et deviner une solution de cette équation en utilisant les résultats trouvés à la question b) pour calculer un candidat solution.
d) Justifier que la courbe x est vraiment l'optimum, en s'appuyant sur les résultats vu en cours et sur les réponses aux questions précédentes.
e) Expliquer de manière succinte ce qui changerait si la condition $Ue^{(1-U)T} \leq 1$ n'était pas vérifiée, et si $U \geq 1$.

Exercice 2 (3 points)**.** Rappeler la définition de correspondance hémi-continue supérieurement et hémi-continue inférieurement.
Considérer ensuite la correspondance $\Gamma : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ suivante

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \{x, 0, 1\} & \text{si } x < 0, \\ [-x, x] & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et dire si Γ est hémi-continue supérieurement et/ou est hémi-continue inférieurement.

Exercice 3 (5 points)**.** Soit $X = \{f \in C^1([0,1]) \ : \ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$. Considérer la fonctionnelle F suivante

$$F(u) := \int_0^1 \left[u^2(t) + e^{-u'(t)} \right] dt.$$

a) Écrire l'équation d'Euler-Lagrange correspondante à la minimisation de F sur X.
b) En multipliant cette équation par u', trouver une quantité conservée le long de toute courbe u qui est solution de cette équation.
c) Montrer qu'il n'existe pas de minimiseur u dans X pour la fonctionnelle F (i.e. il n'existe pas de $u \in X$ tel que $F(u) = \inf\{F(v), v \in X\}$).

Nous précisons qu'une fonction appartenant à $C^1([0,1])$ est une fonction dérivable sur $]0,1[$, qui admet une dérivée à droite en 0 et à gauche en 1, et telle que cette dérivée est une fonction continue sur $[0,1]$.

Exercice 4 (7 points)**.** Soit $x_0 > 0$ fixé. Résoudre soigneusement le problème d'optimisation suivant (en déterminant la politique optimale si elle existe, la valeur du problème et les fonctions valeur si nécessaire et en justifiant tout ce qu'il est opportun de justifier)

$$\sup \Big\{ f(x_0, x_1) + g(x_1, x_2) + h(x_2, x_3) + i(x_3, x_4), x_{i+1} \in \Gamma_i(x_i), i = 0, 1, 2, 3 \Big\}$$

où les paiements f, g, h et i et les correspondances $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ et Γ_3 sont définis par

$$f(x_0, x_1) = x_0 - x_0 x_1 - 10x_1, \quad g(x_1, x_2) = -3x_1^3 - 9x_1^2 + \tfrac{x_2}{x_1+1} - 3,$$
$$h(x_2, x_3) = 3\sqrt{x_2}\, x_3, \qquad i(x_3, x_4) = 4x_3x_4 - \tfrac{4}{3}x_4^{3/2} - \tfrac{7}{3}x_3^3,$$
$$\Gamma_0(x_0) = [2x_0, 3x_0 + 1], \ \Gamma_1(x_1) = [1, (x_1 + 1)^4], \ \Gamma_2(x_2) = [1, x_2 + 1], \ \Gamma_3(x_3) = [0, 4x_3^2 + 1].$$