

Examen final - Session de Rattrapage
1er Septembre 2009

(2h ; seule la feuille des DL usuels est autorisée)

Question de cours 1 (5 points). Énoncer et démontrer soigneusement le théorème sur les développements limités avec reste intégral qu'on a vu en cours.

Exercice 2 (4 points). Considérer la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^x - \cos x - \sin x - (\sin x)^2 - \frac{1}{3}(\sin x)^3.$$

Dire si elle admet un point de minimum ou maximum local au point $x_0 = 0$ et, le cas échéant, si il s'agit d'un minimum ou extremum global.

Exercice 3 (5 points). Calculer, pour tout $M \geq 2\sqrt{3}$, la valeur de l'intégrale

$$\int_{2\sqrt{3}}^M \frac{4x}{(x^2 + 4)(x - 2)^2} dx.$$

Calculer ensuite la limite de cette valeur lorsque $M \rightarrow +\infty$.

Exercice 4 (4 points). Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 telles que $|f'|, |g'| \leq 1$. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Les fonctions f et g sont-elles Lipschitziennes ? que peut-on dire sur leur constante de Lipschitz ?

Démontrer ensuite que h aussi est Lipschitzienne. Peut-on dire qu'elle est C^1 aussi ? le démontrer ou donner un contre-exemple.

Exercice 5 (5 points). Trouver la solution du système

$$\begin{cases} y'''(x) + y''(x) - y'(x) - y(x) = e^x + e^{2x}, \\ y(0) = \frac{1}{9}, \\ y'(0) = \frac{17}{36}, \\ y''(0) = \frac{17}{18}. \end{cases}$$