

**Fin août 2008**  
**Session de Rattrapage**

(seule la feuille des DL usuels est autorisée)

**Question de cours 1** (4 points). Dire ce qu'est une fonction monotone sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  et démontrer que toute fonction monotone est intégrable.

**Exercice 2** (5 points). Considérer le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = -\frac{x}{y'(x)}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Démontrer que la quantité  $[y'(x)]^2 + x^2$  est une intégrale première de cette équation différentielle. Ensuite, en trouvant si nécessaire la forme explicite de la solution, calculer la valeur de  $y(1)$ .

**Exercice 3** (5 points). Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^2$ , croissante, convexe, telle que  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$  et soit  $f^{-1}$  son inverse, définie sur l'image  $f(]a, b[)$ . Démontrer que  $f^{-1}$  est croissante et concave.

*Plus difficile* : démontrer le même résultat sans l'hypothèse  $f \in C^2(]a, b[)$  (c'est-à-dire donner une preuve pour une fonction convexe croissante quelconque).

**Exercice 4** (4 points). Trouver, si elles existent, les valeurs du minimum global et du maximum global de la fonction

$$f(x) := \sqrt{|x|} + 2x + \sqrt{|x|^3}$$

sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

**Exercice 5** (6 points). Calculer, si elles existent, les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

où la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  par

$$f(x) := \frac{x^3 + \sin(2x) - 2 \sin x}{\arctan(x^3) - (\arctan x)^3}.$$