

Fin août 2008
Session de Rattrapage

(seule la feuille des DL usuels est autorisée)

Question de cours 1 (4 points). Dire ce qu'est une fonction monotone sur un intervalle de \mathbb{R} et démontrer que toute fonction monotone est intégrable.

Exercice 2 (5 points). Considérer le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = -\frac{x}{y'(x)}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Démontrer que la quantité $[y'(x)]^2 + x^2$ est une intégrale première de cette équation différentielle. Ensuite, en trouvant si nécessaire la forme explicite de la solution, calculer la valeur de $y(1)$.

Exercice 3 (5 points). Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 , croissante, convexe, telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$ et soit f^{-1} son inverse, définie sur l'image $f(]a, b[)$. Démontrer que f^{-1} est croissante et concave.

Plus difficile : démontrer le même résultat sans l'hypothèse $f \in C^2(]a, b[)$ (c'est-à-dire donner une preuve pour une fonction convexe croissante quelconque).

Exercice 4 (4 points). Trouver, si elles existent, les valeurs du minimum global et du maximum global de la fonction

$$f(x) := \sqrt{|x|} + 2x + \sqrt{|x|^3}$$

sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 5 (6 points). Calculer, si elles existent, les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

où la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$f(x) := \frac{x^3 + \sin(2x) - 2 \sin x}{\arctan(x^3) - (\arctan x)^3}.$$