Math 203 – Analyse et convergence II
–
Examen de 2e session, 19 juin 2015

Durée : 2h ; documents et calculettes interdits.
Chaque exercice est à composer sur une feuille distincte.

Les exercices et les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté.
Il est toujours possible d'admettre la réponse à une question précédente pour traiter les suivantes.
Le barème dépassant largement 20, il n'est pas obligatoire de traiter tous les exercices.

Exercice 1 (6 points). Considérons les suites de fonctions $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \sin(nx)e^{-nx^2}, \qquad g_n(x) = \sin(nx)e^{-n^4x^2}.$$

Avant de poser toute question concernant ces suites, on rappelle l'estimation fondamentale $|\sin(t)| \leq |t|$, valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Trouver la limite simple, pour $n \to \infty$, de (f_n) et de (g_n), respectivement.
2. Prouver que (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
3. Prouver que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
4. Prouver que (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (7 points). Considérons l'intégrale suivante, dépendant du paramètre $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} dt.$$

1. Prouver que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, que l'intégrale est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$).
2. Prouver que F est impaire.
3. Prouver que F est une fonction continue.
4. Prouver que F est C^1 et exprimer $F'(x)$ comme une intégrale dépendant du paramètre x.
5. Calculer $\int_0^\infty e^{itx-t} dt$ et utiliser le résultat pour calculer explicitement $F'(x)$.
6. Calculer $F(x)$.

Exercice 3 (7 points). Considérons la série entière

$$S(x) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} x^n.$$

1. Trouver le rayon de convergence R de cette série.
2. Prouver que son ensemble de convergence E est $[-R, R]$.
3. Prouver que la série converge uniformément sur E.
4. Justifier que la fonction somme S est continue sur E.
5. Justifier que S est C^∞ sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$ et y calculer S'.
6. Calculer les deux limites $\lim_{x \to \pm R} S'(x)$ et discuter la dérivabilité de S en $\pm R$.

Attention, Exercice 4 au verso, tourner la page !

Exercice 4 (7 points)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x) = e^{i2x}$ pour $x \in [0, \pi[$, $f(x) = e^{i4x}$ pour $x \in [\pi, 2\pi[$ et prolongée de manière 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Dessiner les graphes de la partie réelle et de la partie imaginaire de f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
2. Prouver que les coefficients c_n, coefficients de Fourier complexes de f, sont nuls pour tout $n \in \mathbb{Z}$ pair sauf $n = 2, 4$.
3. Calculer c_2 et c_4 et prouver que, pour tout n impair, on a $c_n = \frac{2i}{\pi(n-2)(n-4)}$.
4. Calculer la somme
$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n \text{ impair}}} \frac{4}{\pi^2(n-2)^2(n-4)^2}.$$
5. En déduire la valeur de la somme
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(4k^2-1)^2}.$$