Polytech' Paris-Sud
PeiP 1 - 2010/11
Maths 1

Feuille de TD
Développements limités

Exercice 1. Donner le développement limité en x_0 à l'ordre n des fonctions :

1. $f_1(x) = (\ln(1+x))^2 \quad (n = 4\ ,\ x_0 = 0)$
2. $f_2(x) = \ln(\sin(x) \quad (n = 3\ ,\ x_0 = \frac{\pi}{4})$
3. $f_3(x) = e^{\sin(x)} \quad (n = 3\ ,\ x_0 = 0)$
4. $f_4(x) = \cos(x). \ln(1+x) \quad (n = 3\ ,\ x_0 = 0)$
5. $f_5(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}} \quad (n = 3\ ,\ x_0 = 0)$
6. $f_6(x) = \ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2})) \quad (n = 2\ ,\ x_0 = -\frac{\pi}{2})$
7. $f_5(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}} \quad (n = 2\ ,\ x_0 = 0)$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{x^x - a^a}$, avec $a > 0$.

Exercice 3. Calculer, si elles existent, les limites

$$\lim_{x\to 0} f(x), \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x),$$

où la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$f(x) := \frac{x^3 + \sin(2x) - 2\sin x}{\arctan(x^3) - (\arctan x)^3}.$$

Exercice 4. Détérminer les valeurs du paramètre réel a telles que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} + e^x - 2}{x^2}$$

existe et est finie.

Exercice 5. Calculer le DL d'ordre 5 de la fonction

$$\log(1 + \sin x)$$

au voisinage du point $x = 0$.

Exercice 6. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$.
En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $x \to \ln(1+x)$, estimer la différence $|u_n - \ln(2)|$ et en déduire que $(u_n)_n$ est une suite convergente vers $\ln 2$.

Exercice 7. Considérer la fonction $f(x) = \sin(x^2) - (\sin x)^2$ et dire si le point $x_0 = 0$ en est un point de minimum local ou de maximum local, et préciser s'il s'agit d'un minimum ou maximum global aussi.

Répondre aux mêmes questions concernant les fonctions $g(x) = \arctan(x^3) - (\arctan x)^3$ et $h(x) = (\arctan x)^2 - x^2$.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par la formule

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{2x(1+x^2)}}{x-1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. En effectuant un DL à l'ordre 1 du numérateur, montrer que cette fonction se prolonge par continuité en 1. Notons encore f la fonction ainsi prolongée.
3. En effectuant un DL à l'ordre 3 du numérateur, montrer que f est dérivable au point 1 et donner l'équation de sa tangente $t(x)$ en ce point.
4. En effectuant un DL à l'ordre 4 du numérateur, préciser si au voisinage de 1 on a $f(x) \geq t(x)$ ou $f(x) \leq t(x)$ ou ni l'une ni l'autre inégalité.

Polytech' Paris-Sud
PeiP 1 - 2010/11
Maths 1

Feuille de TD
Calcul d'intégrales et de primitives

Exercice 9. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons $f \geq 0$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$. Démontrer que f est la constante nulle.

Exercice 10. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 et h une fonction continue. Démontrer que la fonction F donnée par

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

est de classe C^1. Qu'est-ce qu'on peut dire en général si $f \in C^{k_1}(\mathbb{R})$, $g \in C^{k_2}(\mathbb{R})$ et $h \in C^{k_3}(\mathbb{R})$ sur la régularité de F ? donner des exemples pour montrer que la réponse qu'on a donnée est optimale (par exemple, si l'on dit que la fonction sera $C^{2+k_1+k_2-k_3}(\mathbb{R})$ il faut trouver un exemple où elle n'est pas $C^{3+k_1+k_2-k_3}(\mathbb{R})$).

Exercice 11. Determiner les primitives des fonctions suivantes :

$$(a)\ x(x^3+1); \quad (b)\ \frac{1}{x-3}; \quad (c)\ \sin(2x - \frac{\pi}{6}); \quad (d)\ \frac{1}{\cos^2(x+\frac{\pi}{2})}$$

$$(e)\ \sin^2(x); \quad (f)\ \cos^4(x); \quad (g)\ \frac{1}{(2x+5)^3}; \quad (h)\ \tan^2(x)$$

Exercice 12. Soit F une primitive de $\frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$, G une primitive de $\frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ sur un intervalle contenant 0. Déterminer $F + G$ et $F - G$ puis déduire les expressions de F et G.

Exercice 13. Calculer les primitives des fonctions suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

$$(a)\ (x+1)e^{-x}; \quad (b)\ \log(x); \quad (c)\ (x^2+x+1)e^{2x}; \quad (d)\ e^x \sin x; \quad (e)\ x \arctan x; \quad (f)\ \log^2(x);$$

$$(g)\ e^{-2x}\cos^2 x; \quad (h)\ \sqrt{x}\log x \quad (i) e^x \sin x; \quad (j) e^x \cos^2 x; \quad (k) \sin(\log(x))$$

Exercice 14. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégration par parties.

$$(a) \int_0^1 t^2 e^t dt; \qquad (b) \int_0^{\pi/2} \cos t \log(1 + \cos t)dt \qquad (c) \int_1^2 \frac{\log(1+t)}{t^2} dt$$

Exercice 15. Calculer les intégrales suivants à l'aide d'une intégration par parties :
$I = \int_1^e \cos(\pi \log x)dx$, $J = \int_1^e \sin(\pi \log x)dx$.

Exercice 16. Déterminer une primitive de xe^x puis calculer les intégrales suivantes :
$I = \int_0^\pi xe^x \sin 2x dx$, $I = \int_0^\pi xe^x \cos 2x dx$.

Exercice 17. Calculer les primitives suivantes en utilisant, si nécessaire, des changements de variable opportuns.

$$(a)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} \qquad (b)\ \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad (c)\ \int \frac{\sin x}{1-\cos x}dx \qquad (d)\ \int \frac{1}{\sin x}dx.$$

Exercice 18. Soit $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{3+\sin^2 x}$. Utiliser le changement de variable $t = \pi - x$, puis déterminer la valeur de I.

Exercice 19. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

et dire si sa valeur est supérieure, inférieure ou égale à $3/2$.

Exercice 20. Calculer une primitive F de la fonction

$$f(x) = (1 + x^2)^{3/2}.$$

Exercice 21. Décomposer chacune des fractions suivantes en éléments simples et en calculer une primitive.

$$(a)\frac{2x+3}{x^2-4} \qquad (b)\frac{3x+7}{x^2-3x+2} \qquad (c)\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$(d)\frac{x^2-1}{x^3+4x^2+5x} \qquad (e)\frac{x^3+2}{x^2+3x+2} \qquad (f)\frac{2x-5}{x(x-1)(x+3)}$$

Exercice 22. Déterminer une primitive de $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$ puis utiliser un changement de variable adéquat pour obtenir la valeur de l'intégrale : $\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1+\tan t}$

Exercice 23. On note $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.
1. Etablir un relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$ (le coefficient C_n^k, qu'on écrit aussi $\binom{n}{k}$, est donné par $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ et est celui qui apparaît dans le binôme de Newton et dans le triangle de Pascal).

Exercice 24. On note F_n une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\frac{1}{(1+x^2)^n}$.
1. En intégrant par parties $F_n - F_{n-1}$, trouver une relation de récurrence entre F_n et F_{n-1} (pour $n \geq 2$). Donner les expressions de F_1, F_2, F_3.
2. On pose $I_n = \int_0^u \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$. Ecrire la relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} et donner la valeur de I_n.