Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2

Feuille 1 de TD
A propos de l'exercice 12

En regardant l'enoncé de l'exo 12 on pourrait penser que quand on parle d'ensembles avec intérieur vide (qui ne contiennet aucun intervalle), on se réfère plutôt à des ensembles fini. Ceci est évidemment faux, et on peut avoir des ensembles A de ce type qui non seulement ne sont pas fini, mais même pas dénombrable. Il suffit de penser à l'ensemble $[a,b]\setminus\mathbb{Q}$ des nombres irrationnels dans un intervalle $[a,b]$: cet ensemble ne contient aucun intervalle (car si il contenait un intervalle, il devrait contenir des rationnels), mais il n'est pas dénombrable.

Or, on pourrait penser que, ok, il existebien des ensembles non dénombrable d'intérieur vide, mais que si on se limite aux ensembles de la forme $A = \{x \in [a,b] \,:\, f'(x) = 0\}$, pour une fonction f dérivable et srictement croissante, cela ne pourra pas arriver. Autrement dit, on se pose la question : peut-on dire que l'ensemble des points où la dérivée d'une fontion dérivable et strictement croissante s'annulle est au plus dénombrable ?

La réponse est non. De plus, on peut dire cela : tout ensemble fermé $A \subset [a,b]$ d'intérieur vide est l'ensemble des points où la dérivée d'une fontion C^1 et strictement croissante s'annulle.

En fait, il suffit de trouver une fonction g, continue, avec $g \geq 0$ et $\{x \in [a,b] \,:\, g(x) = 0\} = A$, pour construire une fonction f qui satisfasse la propriété cherchée. Il suffira en effet de prendre f telle que $f' = g$ et, si g est continue, cela sera possible grâce au théorèeme fondamental du calcul, en prenant une primitive de g, par exemple $f(x) = \int_a^x g(t)dt$. Mais je ne veux pas insister plus sur cela, comme on n'a pas encore parlé d'intégrales. Nous allons nous limiter à chercher la fonction g.

L'ensemble A étant fermé et borné, je vais définir la fonction *distance à l'ensemble* A par

$$g(x) = d(x,A) := \min\{|x-y| \,:\, y \in A\}.$$

Le minimum dans cette définition existe justement parce que A est fermé et borné.

Il est évident que $g(x) = 0$ si $x \in A$: il suffit en fait de prendre $y = x$!

Il est également évident que g est positive, car on prend le minimum d'une quantité qui est toujours positive.

Il reste à démontrer que $g(x) > 0$ si $x \notin A$ et que g est continue.

La première chose est vraie parce que A est fermé : si $x \notin A$, alors $x \in A^c$, et A^c est ouvert ; par définition d'ouvert il existe donc $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset A$, ce qui signifie que pour tout $y \in A$ on a $|x-y| \geq r$. Par conséquent, $g(x) \geq r > 0$. Il faut remarquer que, si A n'était pas fermé, on aurait pu définir $g(x) = d(x,A) = \inf\{|x-y| \,:\, y \in A\}$. Mais dans ce cas là la propriété $g(x) > 0$ si $x \notin A$ aurait été fausse (pensez à la distance à un intervalle ouvert $]c,d[\subset [a,b]$: on aurait évidemment $g(c) = g(d) = 0$, bien que c et d n'appartiennent pas à cet ensemble).

Pour la continuité, on démontrera même plus que ça : on démontrera que la fonction g est Lipschitzienne de constante égale à 1.

Soient $x_1, x_2 \in [a,b]$. On a, grâce à l'existence du minimum, $g(x_1) = |x_1 - y_1|$ pour $y_1 \in A$. Alors on a, par définition de g,

$$g(x_2) \leq |x_2 - y_1| = |x_2 - x_1 + (x_1 - y_1)| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - y_1| = |x_2 - x_1| + g(x_1).$$

Ceci démontre $g(x_2)-g(x_1) \leq |x_2-x_1|$ mais, en échangeant les rôles de x_1 et x_2 et en passant par un point y_2 qui réalise le minimum pour x_2, on trouve aussi $g(x_1)-g(x_2) \leq |x_1-x_2| = |x_2-x_1|$. Ceci nous donne $|g(x_1) - g(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ et le fait que g est Lipschitzienne.

Il est intéressant de remarquer deux choses : que la même démonstration, à une petite modification près, aurait marché dans le cas d'un ensemble A non fermé (g resterait Lipschitzienne) en remplaçant le minimum avec un infimum : il aurait fallu fixer un $\varepsilon > 0$ et prendre y_1 qui ne serait pas optimal mais qui réalise $|x_1 - y_1| < g(x_1) + \varepsilon$, et faire tendre ε à 0 à la fin ; autre chose à remarquer, que cette même procédure marche à chaque foit qu'on définiti une focntion g comme minimum (ou borne inférieure) d'une famille de fonctions avec un paramètre (ici, le choix du point $y \in A$) si toutes ces fonctions sont Lipschitziennes avec la même constante (ici, 1).

Pour terminer l'exemple il nous reste à trouver un ensemble A qui soit fermé, d'intérieur vide et non dénombrable. Il y a plusieurs exemples. Pour ceux qui le connaissent, l'*ensemble de Cantor* est un bon exemple. Mais je vous en donne un autre : soit A l'ensemble de tous les nombres en $[0, 1]$ qui s'écivent en écriture décimale en n'utilisant que les chiffres 3 et 7.

Démontrons qu'il est fermé. Pour faire cela prenons une suite x_n de points de A et supposons $x_n \to x$. Il faut démontrer que x aussi appartient au même segment. Soit $k \in \mathbb{N}$ et séparons les points de cette suite en quatre catégories : ceux qui à la positions k et $(k + 1)-$ième de leur écriture décimale ont 37, ceux qui ont 33, ceux qui ont 73 et ceux qui ont 77. Or, une suite de nombres qui ont 37 à ces positions ne peut que converger à quelque chose qui a 37 ou 38 (ce deuxième cas est celui qu'on a si l'on prend des nombres du type $0, \ldots 3799999 \ldots$). En regardant les quatre cas on pourrait avoir 33, 34, 37, 38, 73, 74, 77 ou 78. Dans tous le cas, à la position $k-$ième on ne peut que avoir 3 ou 7. En appliquant ceci à toutes les positions on trouve que la limite x doit être écrite avec des 3 et des 7 seulement. Donc A est fermé.

Pourquoi est-il d'intéieur vide ? Car si il contenait un intevralle il contiendrait sûrment un petit intervalle de longueur au moins égale 10^{-k}, quitte à prendre k suffisamment grand. Mais dans un intervalle comme ceci le $(k+1)-$ième chiffre prend toutes les valeurs de 0 à 9, donc on epeut pas rester dans A. Alors A est d'intérieur vide.

Enfin, pourquoi A est-il non-dénombrable ? parce que pour choisir un point de A je dois dire une infinité de fois si je choisis " ou 7. C'est la même chose de chosir un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui correspond aux positions où mettre un 3 (en sous-entendant de mettre un 7 ailleurs). Et on sait bien que l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable (et que l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble quelconque n'a pas la même cardinalité que l'ensemble de départ). En particulier, choisir entre deux possibilités une infinitiés de fois donne lieu à un ensemble non-dénombrable (qui a, en fait, la même cardinalité de $\mathbb{R}$).

C'était convainquant ?