Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2

Feuille 1 de TD
Rappels de continuité, dérivabilité et optimisation

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x^3 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 - |x-2| & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 27 & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

Déterminer ses points de continuité et de dérivabilité, dire si il s'agit d'une fonction continue, semi-continue inférieurement et/ou dérivable sur $\mathbb{R}$, dire si elle admet un minimum et un maximum globaux sur $\mathbb{R}$ et les déterminer en cas d'existence.

Exercice 2. Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels et $(m_n)_n$ définie par

$$m_n = \inf_{k \geq n} a_k.$$

Démontrer que $(m_n)_n$ est croissante et en déduire qu'elle admet une limite l. Cette limite sera appelée "limite inférieure" de la suite $(a_n)_n$, et on écrira $l = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Demontrer qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est semicontinue inférieurement au point x si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de A qui converge à x, on a

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Exercice 3. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 \sin x + x^2 \cos x + x \sin(2x) + \cos(2x)}{x^2 (\sin x)^2 + (\cos x)^2}.$$

Vérifier qu'elle est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et démontrer qu'elle admet un minimum mais non pas maximum.

Exercice 4. Pour chacun des ensembles suivants dire s'il s'agit d'un ensemble fermé, d'un ensemble ouvert, d'un ensemble borné :
- $A = [0, 1[\cup \{1\}$,
- $B = [0, 1[\cup \{2\}$,
- $C =]0, 1[\cup \{3\}$,
- $D = [0, 1] \cup \{4\}$,
- $E =]-\infty, 1] \cup \{5\}$,
- $F =]-\infty, 1] \cup [6, \infty[$.

Répondre aussi aux mêmes questions concernant leurs complémentaires. Pour tout ensemble de cette liste (y compris ceux qui sont en liste complémentaire) donner, s'il existe, un exemple de fonction continue qui n'y admet pas de minimum.

Exercice 5. Donner, s'il existe, un exemple de fonction continue bornée qui n'admet ni de minimum ni de maximum sur l'ensemble $[0, 1[$.

Exercice 6. Considérer la fonction $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^6/6 - 5x^4/4 + 2x^2$.
a) Démontrer que cette fonction admet un minimum et un maximum sur $[-a, a]$,
b) Est-il possible qu'elle admette un unique point de minimum ainsi qu'un unique point de maximum ?
c) Démontrer que pour tout $a > 0$ elle admet toujours au moins deux points de maximum.
d) Démontrer qu'il existe un unique a_0 tel qu'elle admette quatre points distincts de maximum et un unique a_1 tel qu'elle admette trois points distincts de minimum.

Exercice 7. Déterminer les constantes de Lipschitz (si elles existent ; c'est-à-dire si les fonctions sont Lipschitziennes) des fonctions suivantes sur les intervalles suivants :
- $f(x) = 2x^2 + x$ sur $[0, 2]$,
- $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$ sur $[-1, 1]$,
- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + x$ sur $[-2, 0]$.

Exercice 8. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ considérer la fonction $f_k(x) = |x|^k$ et trouver, pour chacune d'entre elles la plus grande valeur de n telle que $f_k \in C^n(\mathbb{R})$.

Exercice 9 (Partiel 2008)**.** Soit $f : [-2, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = x^3 + |x|.$$

Trouver, si ils existent, les valeurs de minimum et de maximum globaux de f, ainsi que les points où elles sont réalisées.

Exercice 10. a) Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction C^3 avec $f' \neq 0$. Donner une formule pour $(f^{-1})'''$.
b) Considérer la fonction $f :]e^{-1}, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x \log x$ et montrer qu'elle est une bijection de l'intervalle $]e^{-1}, +\infty[$ sur l'intervalle $]-e^{-1}, +\infty[$. On appellera g la fonction inverse de f.
c) Calculer $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$ et $g'''(0)$.

Exercice 11. Considérer la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

et démontrer qu'elle est $C^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mais qu' elle n'est pas $C^3(\mathbb{R})$ ni dérivable trois fois.

Exercice 12. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable partout dans l'intervalle A. Démontrer que les deux proposition suivantes sont équivalentes ;
- f est strictement croissante ;
- $f' \geq 0$ et l'ensemble $\{x \in A : f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle.

Langage : un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas d'intervalles est dit d'intérieur vide. Les complémentaires des ensemble d'intérieur vide sont dits ensemble denses.