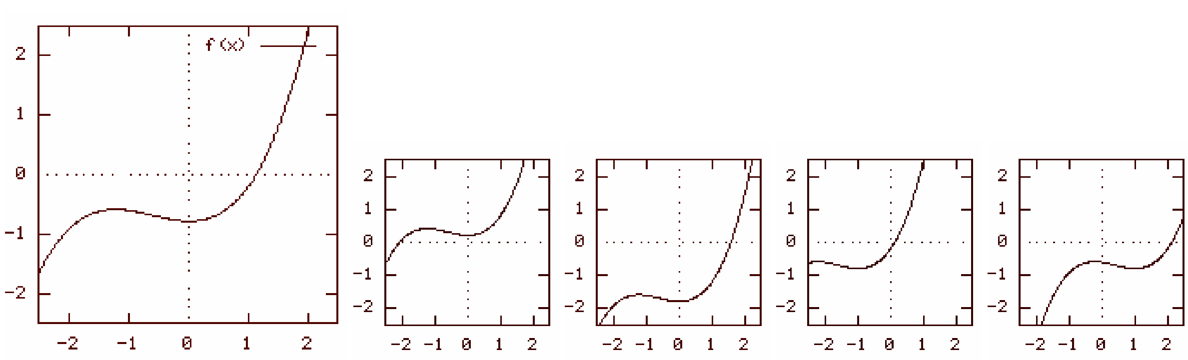
Polytech' Paris-Sud
PeiP1 - S1
Mathématiques

Feuille de TD – chapitre 1
Fonctions réelles d'une variable réelle et limites

Exercice 1. Soit a et b deux réels, et f la fonction donnée par $f(x) = ax + b$. On travaille dans un repère orthonormé.

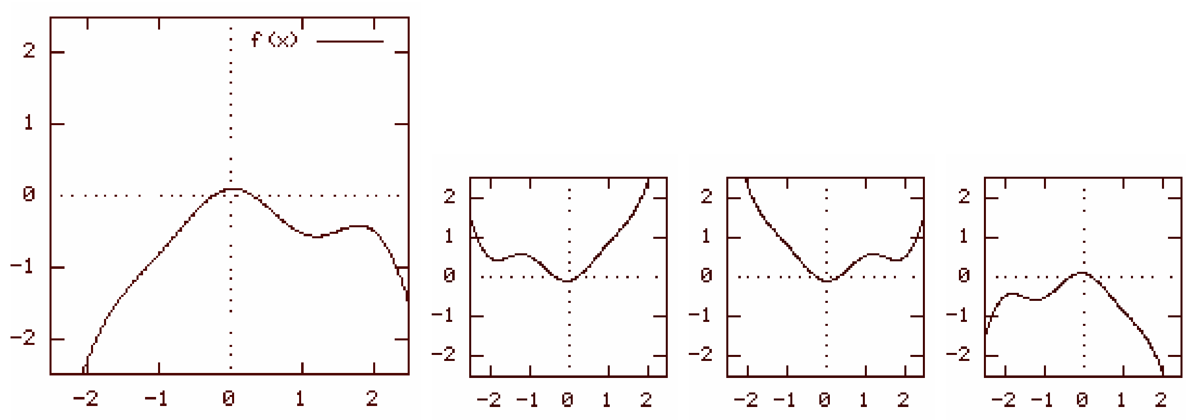
1. Quelle est l'équation du graphe de f ? De quelle sorte de courbe s'agit-il ?
2. Déterminer l'equation de l'image de cette courbe par la symétrie d'axe Ox, puis par la symétrie d'axe Oy, et enfin par la symétrie de centre O.
3. Pour chacune des courbes obtenues, donner une fonction dont elle est le graphe. Pouvez-vous exprimer ces fonctions à l'aide de f ?
4. Déterminer l'équation de l'image du graphe de f par la symétrie d'axe $y = x$. A quelle condition la courbe obtenue est-elle le graphe d'une fonction ?

Exercice 2. Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f. Parmi les quatre dessins suivants, lequel représente la fonction $x \mapsto f(x) - 1$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto f(x) + 1$, $x \mapsto f(x + 1)$, $x \mapsto f(x - 1)$.

Exercice 3. Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f. Parmi les quatre dessins suivants lequel représente la fonction $x \mapsto -f(x)$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto -f(-x)$.

Exercice 4. Tracer le plus rapidement possible l'allure des graphes des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, racine carrée, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, tangente.

Exercice 5. Déterminer le domaine de définition naturel des fonctions définies par les formules suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2-2x-5}, \qquad h(x) = \ln(4x+3).$$

Exercice 6. Dire si les fonctions suivantes sont injectives sur leur domaine de définition, déterminer leurs images et leurs fonctions réciproques, si elles existent

$$f(x) = \ln(\sqrt{x-1}+1), \quad g(x) = \tan\left(\frac{x}{1+|x|}\right), \quad h(x) = \sqrt[3]{\tan(x^3)}.$$

Exercice 7. On se donne trois fonctions réelles de variable réelle, f, g et h. On ne dispose que des informations suivantes

1. Le domaine de définition de f est $]-2,2[$, f s'annule en -1,0,1, elle est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur les autres points,
2. Le domaine de définition de g est $[0,3]$, g s'annule en 0,1, 2, elle est strictement positive en dehors de ces points.
3. Le domaine de définition de h est $]-1,1]$, h est positive sur son ensemble de définition.

Déterminer les domaines de définitions de

1. $f+g$ définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
2. $f.g.h$ définie par $(f.g.h)(x) = f(x).g(x).h(x)$
3. $\ln(f.g)$, $\ln(f.g.h)$, $\ln(g+h)$
4. $\sqrt{f.g}$, $\sqrt{g+h}$.

Exercice 8. 1. Trouver un voisinage de 1 sur lequel $|x+2| < 4$.

2. Trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, un réel $\alpha > 0$ tel que

$$|x-1| < \alpha \Longrightarrow |x^2+x-2| < \varepsilon.$$

3. En déduire que les limites suivantes existent, et les calculer :

$$\lim_{x\to 1} x^2+x-1, \qquad \lim_{x\to 1} x^2+x, \qquad \lim_{x\to 1} (x^2+x-2)\cos x.$$

Exercice 9. Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 10. On suppose connu seulement le fait que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ lorsque $x \to 0$.

1. Déterminer la limite de $\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer la limite de $\frac{\tan x}{x}$ lorsque $x \to 0$
3. En utilisant la formule de duplication du cosinus montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Exercice 11. Déterminer les limites des fonctions suivantes au(x) point(s) indiqué(s)

1. $\frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1}$ en $+\infty$, en $x_0 = 1$.
2. $(3x^4 - 2x^2)e^{-x}$ en $+\infty$
3. $(3x^2 - 2x)e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$
4. $(3x^2 - 2x)e^{-2\ln x}$ en $+\infty$
5. $\frac{2x+3}{3x^4+2}e^x$ en $+\infty$
6. $\frac{2x+3}{3x^4+2}e^{\ln x}$ en $+\infty$
7. $\sqrt{x}\ln(x^2+2x)$ en $x_0 = 0$, en $+\infty$
8. $\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x^2+2x)$ en $x_0 = 0$, en $+\infty$

Exercice 12. Dans cet exercice les fonctions notées ϵ sont définies (au moins) dans un certain voisinage de 0 et ont pour limite 0 en 0.

1. Déterminer les domaines de définition, resp D_a, D_b des fractions rationnelles suivantes

$$\textbf{a. } a(x) = \frac{2x+4}{x^2+x-2} \qquad \textbf{b. } b(x) = \frac{x-1}{x^4+2x^2+1}$$

2. Justifier l'existence de deux fonctions ϵ_1 et ϵ_2 telles que pour tout x dans D_a

$$a(x) = \frac{2}{3} + \epsilon_1(x-4) \quad \text{et} \quad a(x) = -\frac{2}{5} + \epsilon_2(x+4)$$

   Ces fonctions ϵ's sont-elles égales ?.

3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence d'une fonction ϵ_{x_0} telle que pour tout h dans $\mathbb{R}$, $b(x_0+h) = \frac{x_0-1}{x_0^4+2x_0^2+1} + \epsilon(h)$.
   Donner une formule pour la fonction ϵ_{x_0}.