Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2

Feuille 2 de TD
Développements limités

Exercice 1. Donner le développement limité en x_0 à l'ordre n des fonctions :

1. $f_1(x) = (\ln(1+x))^2 \quad (n = 4\ ,\ x_0 = 0)$
2. $f_2(x) = \ln(\sin(x) \quad (n = 3\ ,\ x_0 = \frac{\pi}{4})$
3. $f_3(x) = e^{\sin(x)} \quad (n = 3\ ,\ x_0 = 0)$
4. $f_4(x) = \cos(x).\ln(1+x) \quad (n = 3\ ,\ x_0 = 0)$
5. $f_5(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}} \quad (n = 3\ ,\ x_0 = 0)$
6. $f_6(x) = \ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2})) \quad (n = 2\ ,\ x_0 = -\frac{\pi}{2})$
7. $f_5(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}} \quad (n = 2\ ,\ x_0 = 0)$

Exercice 2.

1. Soit : $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
   Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 pour $x_0 = 0$.
   En déduire la position de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ par rapport au grape de g, au voisinage de 0.
2. Soit : $h(x) = \ln^2(1+x)$.
   Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 pour $x_0 = 0$.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{D} =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ par :$f(x) = \frac{h(x) - x^2}{x - g(x)}$.
   Déduire des questions précédentes que f admet une limite lorsque x tend vers 0.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$.
2. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$.
3. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}$.
4. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} \quad$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
5. $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}, \quad$ avec $a > 0$.

Exercice 4 (Rattrapage 2008)**.** Calculer, si elles existent, les limites

$$\lim_{x \to 0} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

où la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$f(x) := \frac{x^3 + \sin(2x) - 2\sin x}{\arctan(x^3) - (\arctan x)^3}.$$

Exercice 5. Détérminer les valeurs du paramètre réel a telles que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} + e^{x} - 2}{x^2}$$

existe et est finie.

Exercice 6. Calculer le DL d'ordre 5 de la fonction

$$\log(1 + \sin x)$$

au voisinage du point $x = 0$.

Exercice 7. Soit g la fonction $x \to \frac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Exercice 8. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$.
En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $x \to \ln(1 + x)$, estimer la différence $|u_n - \ln(2)|$ et en déduire que $(u_n)_n$ est une suite convergente vers $\ln 2$.

Exercice 9. Considérer la fonction $f(x) = 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$, écrire son développement limité à l'ordre 3 au point $x_0 = 1$ et déterminer le (ou les) points ξ qui réalise l'égalité dans la formule de Taylor-Lagrange quand on développe $f(x)$ autour de $x_0 = 1$ et on prend après $x = 0$

Exercice 10. Considérer la fonction $f(x) = \sin(x^2) - (\sin x)^2$ et dire si le point $x_0 = 0$ en est un point de minimum local ou de maximum local, et préciser s'il s'agit d'un minimum ou maximum global aussi.

Répondre aux mêmes questions concernant les fonctions $g(x) = \arctan(x^3) - (\arctan x)^3$ et $h(x) = (\arctan x)^2 - x^2$.

Développements limités usuels en 0

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{O}\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{O}\left(x^{2n+2}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^n + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^n + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \mathrm{O}\left(x^9\right)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \mathrm{O}\left(x^9\right)$$