

## Feuille 2 de TD Développements limités

**Exercice 1.** Donner le développement limité en  $x_0$  à l'ordre  $n$  des fonctions :

1.  $f_1(x) = (\ln(1+x))^2$  ( $n = 4$ ,  $x_0 = 0$ )
2.  $f_2(x) = \ln(\sin(x))$  ( $n = 3$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ )
3.  $f_3(x) = e^{\sin(x)}$  ( $n = 3$ ,  $x_0 = 0$ )
4.  $f_4(x) = \cos(x) \cdot \ln(1+x)$  ( $n = 3$ ,  $x_0 = 0$ )
5.  $f_5(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$  ( $n = 3$ ,  $x_0 = 0$ )
6.  $f_6(x) = \ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}))$  ( $n = 2$ ,  $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ )
7.  $f_5(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$  ( $n = 2$ ,  $x_0 = 0$ )

**Exercice 2.**

1. Soit :  $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$   
Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 pour  $x_0 = 0$ .  
En déduire la position de la tangente au point d'abscisse  $x = 0$  par rapport au graphe de  $g$ , au voisinage de 0.
2. Soit :  $h(x) = \ln^2(1+x)$ .  
Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 pour  $x_0 = 0$ .
3. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{D} = ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{h(x) - x^2}{x - g(x)}$ .  
Déduire des questions précédentes que  $f$  admet une limite lorsque  $x$  tend vers 0.

**Exercice 3.** Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$  avec  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}$ , avec  $a > 0$ .

**Exercice 4** (Rattrapage 2008). Calculer, si elles existent, les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

où la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  par

$$f(x) := \frac{x^3 + \sin(2x) - 2 \sin x}{\arctan(x^3) - (\arctan x)^3}.$$

**Exercice 5.** Déterminer les valeurs du paramètre réel  $a$  telles que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} + e^x - 2}{x^2}$$

existe et est finie.

**Exercice 6.** Calculer le DL d'ordre 5 de la fonction

$$\log(1 + \sin x)$$

au voisinage du point  $x = 0$ .

**Exercice 7.** Soit  $g$  la fonction  $x \rightarrow \frac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2}$ .

1. Donner le domaine de définition de  $g$ .
2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

**Exercice 8.** Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ .

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction  $x \rightarrow \ln(1+x)$ , estimer la différence  $|u_n - \ln(2)|$  et en déduire que  $(u_n)_n$  est une suite convergente vers  $\ln 2$ .

**Exercice 9.** Considérer la fonction  $f(x) = 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$ , écrire son développement limité à l'ordre 3 au point  $x_0 = 1$  et déterminer le (ou les) points  $\xi$  qui réalise l'égalité dans la formule de Taylor-Lagrange quand on développe  $f(x)$  autour de  $x_0 = 1$  et on prend après  $x = 0$

**Exercice 10.** Considérer la fonction  $f(x) = \sin(x^2) - (\sin x)^2$  et dire si le point  $x_0 = 0$  en est un point de minimum local ou de maximum local, et préciser s'il s'agit d'un minimum ou maximum global aussi.

Répondre aux mêmes questions concernant les fonctions  $g(x) = \arctan(x^3) - (\arctan x)^3$  et  $h(x) = (\arctan x)^2 - x^2$ .