Institut Tunis Dauphine
MI2E 1e année
Analyse 2

Feuille 3 de TD
Fonctions convexes

Exercice 1. Parmi les fonctions suivantes, définies sur les intervalles indiqués, dire lesquelles sont convexes ou concaves :

1. $f_1(x) = |x|^{3/2}$; sur $\mathbb{R}$
2. $f_2(x) = |x|^{1/2}$; sur $\mathbb{R}$
3. $f_3(x) = |x|^{1/2}$; sur $[0, +\infty[$
4. $f_4(x) = e^x$; sur $\mathbb{R}$
5. $f_5(x) = e^{-x}$; sur $\mathbb{R}$
6. $f_6(x) = \log_4 x$; sur $[0, +\infty[$
7. $f_7(x) = \sin x$; sur $[0, 3]$
8. $f_8(x) = \arctan(x)$; sur $\mathbb{R}$

Exercice 2. La fonction $x \mapsto x\ \ln(\ln x)$ définie sur $]1, +\infty[$ est-elle convexe sur $]1, +\infty[$? Si ce n'est pas le cas, donner le plus grand intervalle sur lequel elle est convexe.

Exercice 3. Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$(x_1\, x_2 \ldots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

1. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ concave. Montrer que
$$f(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}) \geq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer que : $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \leq x$ et $\forall x \notin [0, 1]$, $f(x) \geq x$.

Exercice 6. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que en $+\infty$, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ ou vers une limite finie.

Exercice 7. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et concave sur I alors f est affine sur I.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que si f est majorée alors elle est constante.
On pourra raisonner par contraposée.

Exercice 9. Soit $]a, b[\to \mathbb{R}$ convexe et dérivable en tout point de $]a, b[$. Montrer que alors f est de classe C^1.
Une possibilité serait de commencer par remarquer que l'inégalité $f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$ est toujours vérifiée et que cela caractérise la valeur de $f'(x_0)$.