Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2

Feuille 4 de TD
La théorie derrière les intégrales

Exercice 1. On veut calculer les intégrales des fonction $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ sur $[0, 1]$ et plus en général sur tout intervalle $[a, b]$.
- Justifier que f est intégrable sur tout intervalle et que g est intégrable sur tout intervalle inclu soit dans $]-\infty, 0]$ soit dans $[0, +\infty[$.
- Généraliser l'intégrabilité de g à n'importe quel intervalle.
- Calculer $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$ en justifiant le résultat par récurrence.
- Utiliser le résultat précédent et la théorie du cours pour calculer $\int_0^1 f(t)dt$, $\int_0^1 g(t)dt$.
- Calculer les intégrales $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b g(t)dt$.

Exercice 2. Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } (p, q) = 1 \end{cases}$$

(la fonction qui associe 0 à tout irrationnel et un sur le dénominateur de la fraction irréductible qui le représent à tout rationnel). Démontrer que f est intégrable est calculer $\int_0^1 f(t)dt$ ainsi que $\int_0^x f(t)dt$ pour tout x réel. Existe-t-il une primitive de la fonction f (c'est-à-dire une fonction F dérivable en tout point telle que $F' = f$) ?

Exercice 3. La fonction f donnée par $f(x) = x^2$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$? et sur $[0, 1]$?

Exercice 4. Démontrer que si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est uniformément continue alors f est bornée. Peut-on dire la même chose si f est seulement continue ?

Exercice 5. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons $f \geq 0$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$. Démontrer que f est la constante nulle.

Exercice 6. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ un ensemble fini de points. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui coïncide avec f sur $[a, b] \setminus S$. Démontrer que g est intégrable et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$.

Exercice 7. Soient f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 et h une fonction continue. Démontrer que la fonction F donnée par

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

est de classe C^1. Qu'est-ce qu'on peut dire en général si $f \in C^{k_1}(\mathbb{R})$, $g \in C^{k_2}(\mathbb{R})$ et $h \in C^{k_3}(\mathbb{R})$ sur la régularité de F ? donner des exemples pour montrer que la réponse qu'on a donnée est optimale (par exemple, si l'on dit que la fonction sera $C^{2+k_1+k_2-k_3}(\mathbb{R})$ il faut trouver un exemple où elle n'est pas $C^{3+k_1+k_2-k_3}(\mathbb{R})$).

Exercice 8. Dire lesquelles des propositions suivantes sont vraies :
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point alors la fonction f' est intégrable sur tout intervalle borné.
- Toute fonction convexe sur $[a, b]$ est intégrable.
- Toute fonction convexe sur $]a, b[$ est intégrable.
- Si $f : [a, b] \to]-\pi/2, \pi/2[$ est intégrable alors $\tan(f)$ l'est aussi.
- Si $f : [a, b] \to]-\pi/2, \pi/2[$ est continue alors $\tan(f)$ est intégrable.