Polytech' Paris-Sud
PeiP 1 - S1
Mathématiques

Feuille de TD – chapitre 4
Dérivées d'ordre supérieur et développements limités

Exercice 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ considérer la fonction $f_k(x) = |x|^k$ et trouver, pour chacune d'entre elles la plus grande valeur de n telle que $f_k \in C^n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. a) Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction C^3 avec $f' \neq 0$. Donner une formule pour $(f^{-1})'''$.
b) Considérer la fonction $f :]e^{-1}, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x \log x$ et montrer qu'elle est une bijection de l'intervalle $]e^{-1}, +\infty[$ sur l'intervalle $]-e^{-1}, +\infty[$. On appellera g la fonction inverse de f.
c) Calculer $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$ et $g'''(0)$.

Exercice 3. Considérer la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

et démontrer qu'elle est $C^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mais qu' elle n'est pas $C^3(\mathbb{R})$ ni dérivable trois fois.

Exercice 4. Donner le développement limité en x_0 à l'ordre n des fonctions :

1. $f_1(x) = (\ln(1+x))^2 \quad (n = 4 \ , \ x_0 = 0)$
2. $f_2(x) = \ln(\sin(x) \quad (n = 3 \ , \ x_0 = \frac{\pi}{4})$
3. $f_3(x) = e^{\sin(x)} \quad (n = 3 \ , \ x_0 = 0)$
4. $f_4(x) = \cos(x). \ln(1+x) \quad (n = 3 \ , \ x_0 = 0)$
5. $f_5(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}} \quad (n = 3 \ , \ x_0 = 0)$
6. $f_6(x) = \ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2})) \quad (n = 2 \ , \ x_0 = -\frac{\pi}{2})$
7. $f_5(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}} \quad (n = 2 \ , \ x_0 = 0)$

Exercice 5. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} \quad$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
5. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^a - a^x}{x^x - a^a}, \quad$ avec $a > 0$.

Exercice 6. Calculer, si elles existent, les limites

$$\lim_{x \to 0} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

où la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$f(x) := \frac{x^3 + \sin(2x) - 2\sin x}{\arctan(x^3) - (\arctan x)^3}.$$

Exercice 7. Détérminer les valeurs du paramètre réel a telles que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} + e^x - 2}{x^2}$$

existe et est finie.

Exercice 8. Calculer le DL d'ordre 5 de la fonction

$$\log(1 + \sin x)$$

au voisinage du point $x_0 = 0$.

Exercice 9. Calculer le DL d'ordre 5 de la fonction

$$\log(e^x - \sin x)$$

au voisinage du point $x_0 = 0$.

Exercice 10. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$.
En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $x \to \ln(1 + x)$, estimer la différence $|u_n - \ln(2)|$. Comment utiliser ce résultat pour donner une approximation du nombre irrationnel $\ln 2$?

Exercice 11. Considérer la fonction $f(x) = 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$, écrire son développement limité à l'ordre 3 au point $x_0 = 1$ et déterminer le (ou les) points ξ qui réalise l'égalité dans la formule de Taylor-Lagrange quand on développe $f(x)$ autour de $x_0 = 1$ et on prend après $x = 0$

Exercice 12. Considérer la fonction $f(x) = \sin(x^2) - (\sin x)^2$ et dire si le point $x_0 = 0$ en est un point de minimum local ou de maximum local, et préciser s'il s'agit d'un minimum ou maximum global aussi.

Répondre aux mêmes questions concernant les fonctions $g(x) = \arctan(x^3) - (\arctan x)^3$ et $h(x) = (\arctan x)^2 - x^2$.

Exercice 13. Soit f la fonction définie par la formule

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{2x(1 + x^2)}}{x - 1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. En effectuant un DL à l'ordre 1 du numérateur, montrer que cette fonction se prolonge par continuité en 1. Notons encore f la fonction ainsi prolongée.
3. En effectuant un DL à l'ordre 3 du numérateur, montrer que f est dérivable au point 1 et donner l'équation de sa tangente $t(x)$ en ce point.
4. En effectuant un DL à l'ordre 4 du numérateur, préciser si au voisinage de 1 on a $f(x) \geq t(x)$ ou $f(x) \leq t(x)$ ou ni l'une ni l'autre inégalité.