

Feuille 5 de TD Calcul d'intégrales et de primitives

Calcul direct

Exercice 1. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$(a) x(x^3 + 1); \quad (b) \frac{1}{x-3}; \quad (c) \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right); \quad (d) \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$
$$(e) \sin^2(x); \quad (f) \cos^4(x); \quad (g) \frac{1}{(2x+5)^3}; \quad (h) \tan^2(x)$$

Exercice 2. Soit F une primitive de $\frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$, G une primitive de $\frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ sur un intervalle contenant 0. Déterminer $F+G$ et $F-G$ puis déduire les expressions de F et G .

Intégration par parties

Exercice 3. Calculer les primitives des fonctions suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

$$(a) (x+1)e^{-x}; \quad (b) \log(x); \quad (c) (x^2+x+1)e^{2x}; \quad (d) e^x \sin x; \quad (e) x \arctan x; \quad (f) \log^2(x);$$
$$(g) e^{-2x} \cos^2 x; \quad (h) \sqrt{x} \log x \quad (i) e^x \sin x; \quad (j) e^x \cos^2 x; \quad (k) \sin(\log(x))$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégration par parties.

$$(a) \int_0^1 t^2 e^t dt; \quad (b) \int_0^{\pi/2} \cos t \log(1 + \cos t) dt \quad (c) \int_1^2 \frac{\log(1+t)}{t^2} dt$$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivants à l'aide d'une intégration par parties :
 $I = \int_1^e \cos(\pi \log x) dx$, $J = \int_1^e \sin(\pi \log x) dx$.

Exercice 6. Déterminer une primitive de xe^x puis calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi xe^x \sin 2x dx, \quad I = \int_0^\pi xe^x \cos 2x dx.$$

Changement de paramètre d'intégration

Exercice 7. Calculer les primitives suivantes en utilisant, si nécessaire, des changements de variable opportuns.

$$(a) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} \quad (b) \int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (c) \int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx \quad (d) \int \frac{1}{\sin x} dx.$$

Exercice 8. Soit $\int_0^\pi \frac{x \sin x dx}{3 + \sin^2 x}$. Utiliser le changement de variable $t = \pi - x$, puis déterminer la valeur de I .

Exercice 9 (Examen 2008). Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1} dx$$

et dire si sa valeur est supérieure, inférieure ou égale à $3/2$.

Exercice 10. Calculer une primitive F de la fonction

$$f(x) = (1 + x^2)^{3/2}.$$

Fractions rationnelles

Exercice 11. Décomposer chacune des fractions suivantes en éléments simples et en calculer une primitive.

$$\begin{array}{lll} (a) \frac{2x+3}{x^2-4} & (b) \frac{3x+7}{x^2-3x+2} & (c) \frac{x^2+1}{x^2-1} \\ (d) \frac{x^2-1}{x^3+4x^2+5x} & (e) \frac{x^3+2}{x^2+3x+2} & (f) \frac{2x-5}{x(x-1)(x+3)} \end{array}$$

Exercice 12. Déterminer une primitive de $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$ puis utiliser un changement de variable adéquat pour obtenir la valeur de l'intégrale : $\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1+\tan t}$

Divers

Exercice 13. On note $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Etablir un relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} .
2. Calculer I_n .

3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$ (le coefficient C_n^k , qu'on écrit aussi $\binom{n}{k}$, est donné par $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ et est celui qui apparaît dans le binôme de Newton et dans le triangle de Pascal).

Exercice 14. On note F_n une primitive sur \mathbb{R} de $\frac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. En intégrant par parties $F_n - F_{n-1}$, trouver une relation de récurrence entre F_n et F_{n-1} (pour $n \geq 2$). Donner les expressions de F_1, F_2, F_3 .
2. On pose $I_n = \int_0^u \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$. Ecrire la relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} et donner la valeur de I_n .