Université Paris-Dauphine
DEMI2E 1e année
Analyse 2

Feuille 5 de TD
Calcul d'intégrales et de primitives

Attention : le fait que les exos ici soient plus ou moins spéarés par méthode d'intégration ne signifie pas que la méthode à utiliser sera précisée lors d'un éventuel exercice d'examen.

Calcul direct

Exercice 1. Determiner les primitives des fonctions suivantes :

$$(a)\ x(x^3+1); \quad (b)\ \frac{1}{x-3}; \quad (c)\ \sin(2x-\frac{\pi}{6}); \quad (d)\ \frac{1}{\cos^2(x+\frac{\pi}{2})}$$

$$(e)\ \sin^2(x); \quad (f)\ \cos^4(x); \quad (g)\ \frac{1}{(2x+5)^3}; \quad (h)\ \tan^2(x)$$

Exercice 2. Soit F une primitive de $\frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$, G une primitive de $\frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ sur un intervalle contenant 0. Déterminer $F+G$ et $F-G$ puis déduire les expressions de F et G.

Intégration par parties

Exercice 3. Calculer les primitives des fonctions suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

$$(a)\ (x+1)e^{-x}; \quad (b)\ \log(x); \quad (c)\ (x^2+x+1)e^{2x}; \quad (d)\ e^x \sin x; \quad (e)\ x\arctan x; \quad (f)\ \log^2(x);$$

$$(g)\ e^{-2x}\cos^2 x; \quad (h)\ \sqrt{x}\log x \quad (i) e^x \sin x; \quad (j) e^x \cos^2 x; \quad (k) \sin(\log(x))$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégration par parties.

$$(a) \int_0^1 t^2 e^t dt; \qquad (b) \int_0^{\pi/2} \cos t \log(1+\cos t) dt \qquad (c) \int_1^2 \frac{\log(1+t)}{t^2} dt$$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivants à l'aide d'une intégration par parties :
$I = \int_1^e \cos(\pi \log x) dx$, $J = \int_1^e \sin(\pi \log x) dx$.

Exercice 6. Déterminer une primitive de xe^x puis calculer les intégrales suivantes :
$I = \int_0^\pi xe^x \sin 2x dx$, $I = \int_0^\pi xe^x \cos 2x dx$.

Changement de paramètre d'intégration

Exercice 7. Calculer les primitives suivantes en utilisant, si nécessaire, des changements de variable opportuns.

$$(a) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} \qquad (b) \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \qquad (c) \int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx \qquad (d) \int \frac{1}{\sin x} dx.$$

Exercice 8. Soit $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x dx}{3+\sin^2 x}$. Utiliser le changement de variable $t=\pi-x$, puis déterminer la valeur de I.

Exercice 9 (Examen 2008)**.** Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{\ln 4} \sqrt{e^x-1}\,dx$$

et dire si sa valeur est supérieure, inférieure ou égale à 3/2.

Exercice 10. Calculer une primitive F de la fonction

$$f(x)=(1+x^2)^{3/2}.$$

Fractions rationnelles

Exercice 11. Décomposer chacune des fractions suivantes en éléments simples et en calculer une primitive.

$$(a)\frac{2x+3}{x^2-4} \qquad (b)\frac{3x+7}{x^2-3x+2} \qquad (c)\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$(d)\frac{x^2-1}{x^3+4x^2+5x} \qquad (e)\frac{x^3+2}{x^2+3x+2} \qquad (f)\frac{2x-5}{x(x-1)(x+3)}$$

Exercice 12. Déterminer une primitive de $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$ puis utiliser un changement de variable adéquat pour obtenir la valeur de l'intégrale : $\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1+\tan t}$

Divers

Exercice 13. On note $I_n=\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.
1. Etablir un relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}C_n^k$ (le coefficient C_n^k, qu'on écrit aussi $\binom{n}{k}$, est donné par $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ et est celui qui apparaît dans le binôme de Newton et dans le triangle de Pascal).

Exercice 14. On note F_n une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\frac{1}{(1+x^2)^n}$.
1. En intégrant par parties F_n-F_{n-1}, trouver une relation de récurrence entre F_n et F_{n-1} (pour $n\geq 2$). Donner les expressions de F_1, F_2, F_3.
2. On pose $I_n=\int_0^u \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$. Ecrire la relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} et donner la valeur de I_n.