Polytech' Paris-Sud
PeiP 1 - S1
Mathématiques

Feuille de TD – chapitre 5
Calcul d'intégrales et de primitives

Exercice 1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons $f \geq 0$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$. Démontrer que f est la constante nulle.

Exercice 2. Soient f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 et h une fonction continue. Démontrer que la fonction F donnée par

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$$

est de classe C^1. Qu'est-ce qu'on peut dire en général si $f \in C^{k_1}(\mathbb{R})$, $g \in C^{k_2}(\mathbb{R})$ et $h \in C^{k_3}(\mathbb{R})$ sur la régularité de F ? donner des exemples pour montrer que la réponse qu'on a donnée est optimale (par exemple, si l'on dit que la fonction sera $C^{2+k_1+k_2-k_3}(\mathbb{R})$ il faut trouver un exemple où elle n'est pas $C^{3+k_1+k_2-k_3}(\mathbb{R})$).

Exercice 3. Determiner les primitives des fonctions suivantes :

$$(a)\ x(x^3+1); \quad (b)\ \frac{1}{x-3}; \quad (c)\ \sin(2x - \frac{\pi}{6}); \quad (d)\ \frac{1}{\cos^2(x+\frac{\pi}{2})}$$

$$(e)\ \sin^2(x); \quad (f)\ \cos^4(x); \quad (g)\ \frac{1}{(2x+5)^3}; \quad (h)\ \tan^2(x)$$

Exercice 4. Soit F une primitive de $\frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$, G une primitive de $\frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ sur un intervalle contenant 0. Déterminer $F+G$ et $F-G$ puis déduire les expressions de F et G.

Exercice 5. Calculer les primitives des fonctions suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

$$(a)\ (x+1)e^{-x}; \quad (b)\ \log(x); \quad (c)\ (x^2+x+1)e^{2x}; \quad (d)\ e^x \sin x; \quad (e)\ x \arctan x; \quad (f)\ \log^2(x);$$

$$(g)\ e^{-2x}\cos^2 x; \quad (h)\ \sqrt{x}\log x \quad (i) e^x \sin x; \quad (j) e^x \cos^2 x; \quad (k) \sin(\log(x))$$

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégration par parties.

$$(a) \int_0^1 t^2 e^t dt; \qquad (b) \int_0^{\pi/2} \cos t \log(1+\cos t)dt \qquad (c) \int_1^2 \frac{\log(1+t)}{t^2}dt$$

Exercice 7. Calculer les intégrales suivants à l'aide d'une intégration par parties :
$I = \int_1^e \cos(\pi \log x)dx$, $J = \int_1^e \sin(\pi \log x)dx$.

Exercice 8. Déterminer une primitive de xe^x puis calculer les intégrales suivantes :
$I = \int_0^\pi xe^x \sin 2x dx$, $I = \int_0^\pi xe^x \cos 2x dx$.

Exercice 9. Calculer les primitives suivantes en utilisant, si nécessaire, des changements de variable opportuns.

$$(a) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} \qquad (b) \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad (c) \int \frac{\sin x}{1-\cos x}dx \qquad (d) \int \frac{1}{\sin x}dx.$$

Exercice 10. Soit $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{3+\sin^2 x}$. Utiliser le changement de variable $t = \pi - x$, puis déterminer la valeur de I.

Exercice 11. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

et dire si sa valeur est supérieure, inférieure ou égale à 3/2.

Exercice 12. Calculer une primitive F de la fonction

$$f(x) = (1+x^2)^{3/2}.$$

Exercice 13. Décomposer chacune des fractions suivantes en éléments simples et en calculer une primitive.

$$(a)\frac{2x+3}{x^2-4} \qquad (b)\frac{3x+7}{x^2-3x+2} \qquad (c)\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$(d)\frac{x^2-1}{x^3+4x^2+5x} \qquad (e)\frac{x^3+2}{x^2+3x+2} \qquad (f)\frac{2x-5}{x(x-1)(x+3)}$$

Exercice 14. Déterminer une primitive de $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$ puis utiliser un changement de variable adéquat pour obtenir la valeur de l'intégrale : $\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1+\tan t}$

Exercice 15. On note $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.
1. Etablir un relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$ (le coefficient C_n^k, qu'on écrit aussi $\binom{n}{k}$, est donné par $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ et est celui qui apparaît dans le binôme de Newton et dans le triangle de Pascal).

Exercice 16. On note F_n une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\frac{1}{(1+x^2)^n}$.
1. En intégrant par parties $F_n - F_{n-1}$, trouver une relation de récurrence entre F_n et F_{n-1} (pour $n \geq 2$). Donner les expressions de F_1, F_2, F_3.
2. On pose $I_n = \int_0^u \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$. Ecrire la relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} et donner la valeur de I_n.