TP 1 : Optimisation sans contrainte en dimension 1.

1 Énergie rayonnante d'un corps noir

Un corps noir est un objet idéal qui absorberait toute l'énergie électromagnétique qu'il recevrait, sans en réfléchir ni en transmettre. L'énergie rayonnant d'un corps noir dans l'intervalle d'émission $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, par unité de surface et de temps est appelée *émittance monochromatique maximale* est est notée $L(\lambda)$. Sa valeur est donnée par la loi de Planck :

$$E(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\left(\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1\right)}.$$

Les constantes intervenant dans cette loi sont :
- $c = 2.997 \cdot 10^8$ m/s : vitesse du rayonnement électromagnétique dans le milieu où se propage le rayonnement (ici le vide),
- $h = 6.625 \cdot 10^{-34}$ J.s : constante de Planck,
- $k = 1.380 \cdot 10^{-23}$ J/K : constante de Boltzmann,
- λ : longueur d'onde (m),
- T : température de la surface du corps noir (K)

L'objectif de ce TP est de trouver la valeur λ^* de λ qui maximise l'émittance énergétique monochromatique $L(\lambda)$, la température T étant donnée. Pour cela, nous utiliserons plusieurs méthodes de minimisation vues en cours. Nous testerons si le résulat est satisfaisant en regardant si les lois de Wien sont vérifiées. Ces lois s'écrivent comme suit

$$\lambda^* T = A \quad \text{et} \quad L(\lambda^*) = BT^5,$$

où A et B sont des constantes.

1. Écrire une fonction `L.m` qui prend en argument la température T et la longueur d'onde λ et qui retourne $L(\lambda)$.

2. Créer un script `scriptTP1.m` dans lequel on testera les différentes méthodes. Tracer sur une même figure la fonction E, pour les valeurs suivantes de la température : $T = 300,\ 400,\ 500,\ 600,\ 700,\ 800$. On prendra λ dans $[10^{-7}, 2 \cdot 10^{-5}]$.

3. Donner une estimation grossière de λ^* pour chaque température.

2 Méthode de la section dorée

Cette méthode est valable uniquement pour des fonctions :
– à valeurs réelles,
– dont on connait un intervalle sur lequel elle admet un unique minimum.

Le principe de la méthode est semblable à celui de la dichotomie, sauf qu'à chaque étape on calcule la valeur de la fonction en deux points de l'intervalle $[a, b]$ définis par :

$$a' = a + \frac{b-a}{\tau^2} \quad \text{et} \quad b' = a + \frac{b-a}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Algorithme de la section dorée pour minimiser une fonction f
Initialiser le compteur `it` à 0, l'erreur `err` à $b - a$.
Tant que `err` $> \varepsilon$ (tolérance choisie) :
– calculer a' et b',
– évaluer $f(a')$ et $f(b')$,
– si $f(a') > f(b')$: poser $a = a'$
  si $f(a') < f(b')$: poser $b = b'$
  si $f(a') = f(b')$: poser $a = a'$ et $b = b'$,
– calculer la nouvelle erreur `err` $= b - a$,
– incrémenter le compteur.

1. On veut appliquer l'algorithme de la section dorée à la fonction $-L$ afin de maximiser L. Écrire une fonction `section_doree.m` qui prend en argument la température T, les bornes a et b de l'intervalle de longueur d'onde étudié, et la tolérance ε. Cette fonction doit retourner la valeur de λ^* ainsi que le nombre d'itérations effectuées.

2. Tester cette fonction dans `scriptTP1.m` pour trouver λ^*, pour chacune des valeurs de T et en prenant comme tolérance $\varepsilon = 10^{-12}$. Afficher les résultats à l'aide de la fonction `fprintf` sous la forme décimale pour la température, et exponentielle avec 7 chiffres après la virgule pour λ^*.

3. Vérifier la cohérence des résultats à l'aide des lois de Wien.

3 Méthode de Newton en dimension 1

Cette méthode est valable pour des fonctions dont on connait une approximation des zéros.

L'algorithme de Newton-Raphson permet de trouver un point en lequel une fonction f s'annule, connaissant une approximation x^0 de ce point :

> *Algorithme de Newton-Raphson en dimension* 1
> Initialiser le compteur `it` à 0, l'erreur `err` à 1.
> Tant que `it` $<$ `itmax` et que `err` $< \varepsilon$ (tolérance choisie) :
> – calculer le prochain candidat pour le zéro de f : $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$,
> – calculer l'erreur `err` $= |f'(xk)|$,
> – incrémenter le compteur.

Pour trouver le minimum d'une fonction L, on peut chercher un point où la dérivée L' s'annule. Il suffit pour cela d'appliquer l'algorithme de Newton-Raphson à la fonction L'.

1. Les dérivées successives de L sont données par :

$$L'(\lambda) = \frac{-10\,hc^2}{\lambda^6\left(\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right)-1\right)} + \frac{2\,h^2c^3}{kT} \times \frac{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right)}{\lambda^7\left(\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right)-1\right)^2},$$

$$\begin{aligned} L''(\lambda) \;=\; & \frac{60\,hc^2}{\lambda^7\left(\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right)-1\right)} - \frac{24\,h^2c^3}{kT} \times \frac{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right)}{\lambda^8\left(\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right)-1\right)^2} \\ & + \frac{4\,h^3c^4}{k^2T^2} \times \frac{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right)^2}{\lambda^9\left(\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right)-1\right)^3} - \frac{2\,h^3c^4}{k^2T^2} \times \frac{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right)}{\lambda^9\left(\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right)-1\right)^2}. \end{aligned}$$

Écrire deux fonctions `Lprime.m` et `Lseconde.m` qui prennent en argument la longueur d'onde λ et la température T, et qui renvoient respectivement $L'(\lambda)$ et $L''(\lambda)$.

2. Écrire une fonction Matlab `newton.m` qui prend en argument un point de départ λ_0, une tolérance ε et la température T. Cette fonction retourne un réel λ^* qui annule L' au voisinage de λ_0 et le nombre d'itérations nécessaires pour trouver λ^*.

3. Tester cette fonction dans `scriptTP1.m` pour trouver λ^* à $\varepsilon = 10^{-12}$ près, pour chacune des valeurs de T et les afficher à l'aide de la fonction `fprintf`. On choisira bien le point de départ λ_0.

4. Vérifier la cohérence des résultats à l'aide des lois de Wien, et comparer le nombre d'itérations avec la méthode de la section dorée.