Calcul Différentiel et Analyse Complexe
–
Examen blanc, 12 mai 2020

Exercice 1 (5 points)**.** Étant donné un nombre réel positif $\alpha > 0$, considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x,y) = (x^3 - 3x|y|^\alpha, 3|x|^\alpha y - y^3).$$

a) Pour quels valeurs de α la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

b) Pour quels valeurs de α la fonction f est-elle différentiable en $(1,0)$?

c) Pour quels valeurs de α la fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Écrire dans ce cas sa matrice Jacobienne.

d) Supposons $f \in C^1$. Si on identifie maintenant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ en identifiant (x,y) au complexe $x+iy$, pour quels valeurs de α la fonction f admet-elle une dérivée complexe en 1 ?et en 2 ?

e) Avec la même identification entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, prouver que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si $\alpha = 2$. S'agit-il d'un biholomorphisme du plan complexe sur lui-même ?

Corrigé

a) En regardant composante par composante, et en considérant que les fonctions x^3 et y^3 sont C^∞, il suffit de garantir que les fonctions $x|y|^\alpha$ et $y|x|^\alpha$ sont différentiables en $(0,0)$. Or, pour tout $\alpha > 0$ ces fonctions sont $o(||(x,y)||)$, ce qui suffit pour dire qu'elles sont différentiable avec différentielle nulle en $(0,0)$.

b) Il faut maintenant garantir que les fonctions $x|y|^\alpha$ et $y|x|^\alpha$ sont différentiables en $(1,0)$, où elles s'annulent. Si $\alpha > 1$ elles sont C^1 et donc différentiables. Si $\alpha \leq 1$ la dérivée partielle par rapport à y de $x|y|^\alpha$ en $(1,0)$ n'existe pas, et donc la fonction n'est pas différentiable. Il faut donc $\alpha > 1$.

c) Si $\alpha \leq 1$ la fonction n'est pas différentiable en $(1,0)$, donc pas C^1. Si $\alpha > 1$ la fonction est une combinaison de fonctions C^1, et elle est aussi différentiable. Sa matrice Jacobienne vaut

$$\begin{pmatrix} 3x^2 - 3|y|^\alpha & -3xy|y|^{\alpha-2} \\ 3xy|x|^{\alpha-2} & 3|x|^\alpha - 3y^2 \end{pmatrix}.$$

A noter que, pour $1 < \alpha <\leq 2$, le produit $y|y|^{\alpha-2}$ est considéré 0 en $y = 0$ (et de même pour $x|x|^{\alpha-2}$ en $x = 0$).

d) Pour avoir une dérivée complexe il faut que la Jacobienne ait des termes identiques sur la diagonale et opposés en dehors de la diagonale. Il faut donc

$$\begin{cases} 3x^2 - 3|y|^\alpha = 3|x|^\alpha - 3y^2, \\ 3xy|y|^{\alpha-2} = 3xy|x|^{\alpha-2}. \end{cases}$$

Dans le cas du point 1 (donc $x = 1$, $y = 0$) la première équation donne $3 = 3$ quel que soit α, la deuxième $0 = 0$. La fonction f admet donc une dérivée complexe en 1 pour tout $\alpha > 1$. La différentiabilité complexe en 2 est plus contraignante, puisqu'on trouve $12 = 3.2^\alpha$, qui n'est vérifié que pour $\alpha = 2$.

e) Si on $\alpha = 2$ on facilement que l'on a $f(x+iy) = (x+iy)^3$ et donc f est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour $\alpha \neq 2$ la fonction n'est pas différentiable au sens complexe au point 2, donc elle ne peut pas être holomorphe. Dans le cas $\alpha = 2$, où l'on a $f(z) = z^3$, il ne s'agit pas d'un bihoomorphisme parce que la fonction n'est pas injective.

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer la courbe $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(\theta) := (\sin(3\theta)\cos(\theta), \sin(3\theta)\sin(\theta)),$$

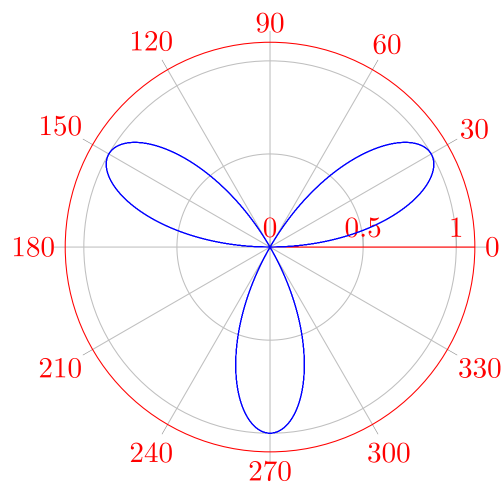
et supposer que son support $E = \gamma([0, \pi])$ s'écrit comme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, f(x, y) = 0\}$ pour une certaine fonction $f \in C^1$.

a) Prouver qu'alors on a $\nabla f(0, 0) = 0$.

b) En supposant $f \in C^2$, prouver que l'on a aussi $D^2 f(0, 0) = 0$.

Corrigé

On commence par dessiner la courbe, en obtenant



On peut voir qu'i s'agit d'une trèfle, avec trois courbes régulières se rencontrant à l'origine. Si on imagine de l'écrire sous la forme $\{f = 0\}$, on voit qu'on ne peut pas avoir $f \in C^1$ et $\nabla f(0, 0) \neq 0$. En effet, dans ce cas, on pourrait appliquer le théorème des fonctions implicites et écrire E comme une seule courbe régulière passant par l'origine (le graphe d'une fonction $y = \phi(x)$ ou $x = \phi(y)$), alors qu'on en a trois.

Prenons maintenant $f \in C^2$ avec $E = \{f = 0\}$ et dérivont deux fois $f(\gamma(\theta)) = 0$. On obtient

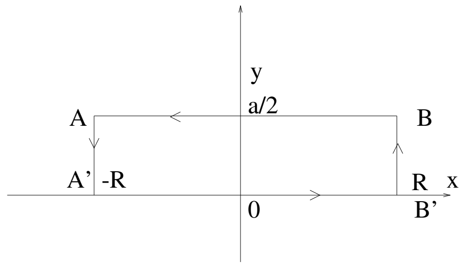
$$D^2 f(\gamma(\theta))\gamma'(\theta) \cdot \gamma'(\theta) + \nabla f(\gamma(\theta)) \cdot \gamma''(\theta) = 0.$$

Si on prend θ tel que $\gamma(\theta) = (0, 0)$, en utilisant $\nabla f(0, 0) = 0$, on a donc $D^2 f(0, 0)\gamma'(\theta) \cdot \gamma'(\theta) = 0$. Or, il y a trois valeurs différentes de θ qu'on peut prendre, qui donnent lieu à trois vecteurs $\gamma'(\theta)$ différents et non colinéaires. Ceci permet de conclure $D^2 f(0, 0) = 0$. En effet, si A est une matrice symétrique telle que $Av \cdot v = 0$ pour trois vecteurs "non colinéaires", on a $A = 0$. Pour voir cela, on peut supposer que ls trois vecteurs v_i sont des vecteurs unités (quitte à les normaliser), diagonaliser A selon une base orthonormée, et écrire les vecteurs $v_i = (\cos(t_i), \sin(t_i)$ dans cette même base. On peut aussi supposer $t_i \in [0, \pi[$, quitte à multiplier fois -1 les vecteurs. Si on appelle λ et μ les deux termes diagonaux de A après diagonalisation, on aurait

$$0 = \lambda \cos^2(t_i) + \mu \sin^2(t_i) = (\lambda - \mu)\cos^2(t_i) + \mu.$$

Les valeurs prises par $\cos^2(t_i)$ pour trois valeurs différentes de $t_i \in [0, \pi[$ ne peuvent pas être toutes égales. La fonction $s \mapsto (\lambda - \mu)s + \mu$ s'annulerait donc sur au moins deux valeurs différentes de s. Comme c'est une droite, elle serait forcement la droite nulle, donc $\lambda - \mu = 0$ et $\mu = 0$. La matrice A serait alors diagonalisable avec valeurs propres nulles, donc $A = 0$.

Exercice 3 (6 points)**.** On désigne par γ_R le contour du rectangle de sommets R, $R + i\frac{a}{2}$, $-R + i\frac{a}{2}$ et $-R$ parcouru dans le sens direct :



a) Que vaut $\int_{\gamma_R} e^{-z^2}\,dz$?

b) Montrer que $\int_{\overrightarrow{AA'}} e^{-z^2}$ et $\int_{\overrightarrow{BB'}} e^{-z^2}$ tendent vers 0 quand $R \to \infty$, si $a > 0$ est fixé

c) En déduire la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos ax\,dx.$$

On pourra utiliser l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Corrigé

a) La fontion $z \mapsto e^{-z^2}$ étant holomorphe sur $\mathbb{C}$ et la courbe γ_R étant un lacet, l'intégrale vaut 0.

b) En écrivant le chemin allant de B' à B comme $\gamma_R(t) = R+it$, $t \in [0, a/2]$, on peut écrire $\int_{\overrightarrow{B'B}} e^{-z^2} = \int_0^{a/2} e^{-(R+it)^2} idt$. On a donc

$$\int_{\overrightarrow{B'B}} e^{-z^2} = e^{-R^2} \int_0^{a/2} e^{t^2} e^{-2Rit} idt$$

et donc

$$\left| \int_{\overrightarrow{B'B}} e^{-z^2} \right| \leq e^{-R^2} \frac{a}{2} e^{a^2/4}.$$

Cette quantité tend vers 0 si $R \to \infty$ et a est fixé. Le calcul pour le chemin allant de A à A' est essentiellement le même.

c) Tout d'abord on écrit

$$\iint_{\overrightarrow{AB}} e^{-z^2} = \iint_{\overrightarrow{AA'}} e^{-z^2} + \iint_{\overrightarrow{A'B'}} e^{-z^2} + \iint_{\overrightarrow{B'B}} e^{-z^2}.$$

En explicitant les intégrales sur AB et $A'B'$ on obtient

$$\int_{-R}^{R} e^{-(t+ia/2)^2} dt = \int_{-R}^{R} e^{-t^2} dt + \varepsilon(R),$$

où $\varepsilon(R)$ est une quantité qui tend vers 0 pour $R \to \infty$, grâce à ce qui a été montré avant. En prenant la limite $R \to \infty$ on obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(t+ia/2)^2} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt,$$

donc

$$e^{a^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{-iat} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Ceci donne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \left(\cos(at) - i \sin(at)\right) dt = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}$$

et, en prenant seulement la partie réelle des deux côtés,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \cos(at) dt = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}.$$

Exercice 4 (6 points)**.** Si m, n sont des entiers naturels, définissons

$$I_{m,n} := \int_{\mathbb{R}} \frac{x^m}{1+x^{2n}} dx.$$

a) Prouver que cette intégrale converge si et seulement si $2n \geq m+2$.

b) Prouver que l'on a $I_{m,n} = 0$ si l'intégrale converge et m est impair.

c) Calculer $I_{2,2}$ à l'aide du théorème des résidus et prouver que l'on a $I_{2,2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

d) Calculer $I_{2,3}$.

e) Calculer $I_{m,n}$ en l'exprimant comme une somme finie de termes explicites

Corrigé

— L'intégrande est ue fonction positive et continue sur $\mathbb{R}$, asymptotiquement équivalente, pour $x \to \pm\infty$, à x^{m-2n}. Pour que l'intégrale converge il faut et il suffit $m - 2n < -1$. S'agissant d'entier, cela donne $m - 2n \leq -2$.

— Si m est impair la fonction intégrane est impaire et un changement de variable $x \mapsto -x$ montre que les intégrales sur tout intervalle de la fore $[-M, M]$ s'annullent. L'intégrale sur $\mathbb{R}$ aussi, donc.

— A l'aide du théorème des résidus on sait qu'on peut voir l'intégrale sur $\mathbb{R}$ comme la limite, lorsque $R \to \infty$, de l'intégrale de la fonction $f(z) := z^m/(1+z^{2n})$ sur le lacet γ_R donné par $\gamma_R(t) = t$ pour $t \in [-R, R]$ et $\gamma_R(t) = Re^{i(t-R)}$ pour $t \in [R, R+\pi]$. Cette intégrale peut se calculer par la formule des résidus et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^m}{1+x^{2n}} dx = 2\pi i \sum_{a \in A} \mathrm{Res}(f, a),$$

où A est l'ensemble des pôles de f ayant partie imaginaire positive. Ces pôles sont ceux de la forme $a_k = e^{i\pi\frac{k}{2n}}$ pour k impair et $0 < k < 2n$ (donc $k = 2h+1$ pour $h = 0, \ldots, n-1$). Ils sont tous des ôles simples. On peut donc calculer les résidus par la formule qui s'applique à un pôle simple a d'une fraction g/h, qui donne $g(a)/h'(a)$. Ici on a $g(z) = z^m$ et $h(z) = 1 + z^{2n}$ donc $h'(z) = 2nz^{2n-1}$. On a donc

$$\mathrm{Res}(f, a_k) = \frac{1}{2n} a_k^{-(2n-1-m)}.$$

Ceci donne la formule générale pour $I_{m,n}$ (dernière question)

$$I_{m,n} = \frac{\pi i}{n} \sum_{h=0}^{n-1} e^{-i\pi\frac{(2h+1)(2n-1-m)}{2n}}.$$

Dans le cas $n = 2$ les pôles en question sont

$$a_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad a_3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

Pour calculer $I_{2,2}$ on a donc

$$I_{2,2} = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} + \frac{\sqrt{2}}{-1+i}\right) = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2} - \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}\right) = \frac{\pi i}{2}\frac{-2\sqrt{2}i}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Il nous reste à calculer $I_{2,3}$. Dans ce cas là on a $2n - 1 - m = 3$, donc on trouve

$$I_{2,3} = \frac{\pi i}{3} \sum_{h=0}^{2} e^{-i\frac{\pi}{2}(2h+1)} = \frac{\pi i}{3}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{-3i\frac{\pi}{2}} + e^{-5i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi i}{3}(-i) = \frac{\pi}{3},$$

où on a utilisé $e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{-5i\frac{\pi}{2}} = -i$ et $e^{-3i\frac{\pi}{2}} = i$.