Calcul Différentiel et Analyse Complexe
—
Examen blanc, 13 mai 2020

Exercice 1 (5 points)**.** Étant donné un nombre réel positif $\alpha > 0$, considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x, y) = (x^3 - 3x|y|^\alpha, 3|x|^\alpha y - y^3).$$

a) Pour quels valeurs de α la fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

b) Pour quels valeurs de α la fonction f est-elle différentiable en $(1, 0)$?

c) Pour quels valeurs de α la fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Écrire dans ce cas sa matrice Jacobienne.

d) Supposons $f \in C^1$. Si on identifie maintenant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ en identifiant (x, y) au complexe $x + iy$, pour quels valeurs de α la fonction f admet-elle une dérivée complexe en 1 ? et en 2 ?

e) Avec la même identification entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, prouver que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si $\alpha = 2$. S'agit-il d'un biholomorphisme du plan complexe sur lui-même ?

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer la courbe $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$

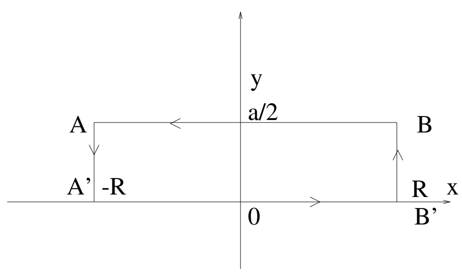
$$\gamma(\theta) := (\sin(3\theta) \cos(\theta), \sin(3\theta) \sin(\theta)),$$

et supposer que son support $E = \gamma([0, \pi])$ s'écrit comme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x, y) = 0\}$ pour une certaine fonction $f \in C^1$.

a) Prouver qu'alors on a $\nabla f(0, 0) = 0$.

b) En supposant $f \in C^2$, prouver que l'on a aussi $D^2 f(0, 0) = 0$.

Exercice 3 (6 points)**.** On désigne par γ_R le contour du rectangle de sommets R, $R + i\frac{a}{2}$, $-R + i\frac{a}{2}$ et $-R$ parcouru dans le sens direct :



a) Que vaut $\int_{\gamma_R} e^{-z^2}\, dz$?

b) Montrer que $\int_{\overrightarrow{AA'}} e^{-z^2}$ et $\int_{\overrightarrow{BB'}} e^{-z^2}$ tendent vers 0 quand $R \to \infty$, si $a > 0$ est fixé

c) En déduire la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos ax\, dx.$$

On pourra utiliser l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 4 (6 points)**.** Si m, n sont des entiers naturels, définissons

$$I_{m,n} := \int_{\mathbb{R}} \frac{x^m}{1 + x^{2n}} dx.$$

a) Prouver que cette intégrale converge si et seulement si $2n \geq m + 2$.

b) Prouver que l'on a $I_{m,n} = 0$ si l'intégrale converge et m est impair.

c) Calculer $I_{2,2}$ à l'aide du théorème des résidus et prouver que l'on a $I_{2,2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

d) Calculer $I_{2,3}$.

e) Calculer $I_{m,n}$ en l'exprimant comme une somme finie de termes explicites