Calcul Différentiel et Analyse Complexe

–

Examen blanc

Cherchez à le faire en 3h (même durée que l'examen final).

Cet examen blanc sera corrigé lors de la session supplémentaire du 24/4.

Exercice 1 (4 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par

$$f(x,y,z) = (e^{y+z}\cos x, e^{x+z}\cos y, e^{x+y}\cos z).$$

Prouver qu'on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ et $R > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ le système $f(x,y,z) = (1+\varepsilon_1, 1+\varepsilon_2, 1+\varepsilon_3)$ admet une et une seule solution dans la boule $B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (9 points)**.** Considérer la courbe $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ donnée par

$$\gamma(\theta) := e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

1. Prouver que cette courbe est régulière.
2. Faire un dessin schématique de la courbe γ.
3. S'agit-il d'une courbe injective ?
4. Soit $L(\gamma)$ la longueur de cette courbe. Prouver que l'on a $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{5 + 4\cos\theta}\, d\theta$.
5. Calculer

$$\text{a)} \int_\gamma z dz, \quad \text{b)} \int_\gamma \frac{1}{3-z} dz, \quad \text{c)} \int_\gamma \frac{1}{1-2z} dz, \quad \text{d)} \int_\gamma \frac{1}{(1-2z)^2} dz, \quad \text{e)} \int_\gamma \frac{1}{1+2z} dz.$$

Exercice 3 (5 points)**.** Étant donnés deux nombres $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$, considérer la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où la suite $(a_n)_n$ est définie par récurrence par la relation

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2}.$$

1. Prouver que cette série entière a un rayon de convergence infini.
2. Prouver que sa somme $f(z)$ satisfait $f''(z) = zf'(z) + f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. Prouver que, si $a_1 = 0$, alors $f(z) = a_0 e^{z^2/2}$.
4. Prouver qu'il existe une unique fonction holomorphe $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $g'(z) = e^{-z^2/2}$ et $g(0) = 0$. Prouver ensuite que l'on a $f(z) = a_0 e^{z^2/2} + a_1 g(z) e^{z^2/2}$.

Exercice 4 (9 points)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. Prouver que si $\mathrm{Re} f = \mathrm{Im} f$ sur Ω, alors f est constante.
2. Prouver que si $\mathrm{Re} f = \mathrm{Im} f$ sur un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ non vide, alors f est constante.
3. Peut-on dire que f est constante si on suppose juste $\mathrm{Re} f = \mathrm{Im} f$ sur un segment contenu dans Ω ?
4. Et si on suppose $\mathrm{Re} f = \mathrm{Im} f$ sur deux segments qui se croisent ?
5. Et si on rajoute l'hypothèse que l'angle entre ces deux segments est un multiple irrationel de π ?
6. Prouver que si $\Omega = \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re} f - \mathrm{Im} f$ est bornée, alors f est constante.