Polytech' Paris-Sud
Orsay

2011–2012
S1-MathInfo

Contrôle continu de Mathématiques n°1 (MathInfo)

du lundi 3 octobre 2011 – Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 5 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**.

Exercice 1. (5 points)
On rappelle que $2,71 \leq \mathrm{e} \leq 2,72$ où $\mathrm{e} = \exp(1)$. On dénote par $(\mathcal{P})$ l'assertion suivante:

$$(\forall x \in \mathbb{R})\big((x \geq 3) \Rightarrow (x^2 + \ln x + 2x + 1 \geq 17)\big)$$

(1) $(\mathcal{P})$ est-elle vraie ?

(2) Ecrire sa négation. Est-elle vraie ?

(3) Ecrire sa contraposée. Est-elle vraie ?

(4) a. Ecrire la réciproque de $(\mathcal{P})$.

b. Supposons que A, B et C soient trois assertions telles que A $\Rightarrow$ B et B $\Rightarrow$ C. Montrer que *si* C $\Rightarrow$ A, *alors* A, B et C sont équivalentes (2 à 2).

c. *(difficile !)* La réciproque de $(\mathcal{P})$ est-elle vraie ?
Indice. On pourra considérer les assertions suivantes :
A : $(x \geq 3)$, B : $(x^2 + \ln x + 2x + 1 > 17)$ et C : $(x^2 + \ln x + 2x + 1 \geq 17)$.

Exercice 2. (6 points)
Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

(1) Montrer que : $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow (A = B)$.

(2) a. On suppose A, B et C non-vides. Montrer :
$(\mathcal{P})$ $\big((A \cap B = A \cap C)$ et $(A \cup B = A \cup C)\big) \Rightarrow (B = C)$.

b. Justifier (*ici*, un dessin suffit) l'affirmation suivante :
"$A \cap B = A \cap C$ n'est pas une condition suffisante pour que $B = C$".

c. Est-ce que $(\mathcal{P})$ reste vraie pour $A = \emptyset$? et pour $B = \emptyset$?

On rappelle que la différence symétrique de A par B est l'ensemble $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

(3) a. Montrer l'assertion $(\mathcal{Q})$: $\big((A = \emptyset) \Rightarrow (A \Delta B = B)\big)$.

b. *(difficile !)* Montrer la réciproque de $(\mathcal{Q})$.

Exercice 3. (4 points)
On rappelle que pour tout entier n et tout entier l, avec $0 \leq l \leq n$:
$$\binom{n}{l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}$$
Soit p un nombre entier, $p \geq 2$.

(1) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots p-1\}$, on a
$$\binom{p}{k} = \frac{p}{p-k}\binom{p-1}{k}$$

On suppose dorénavant que p est un nombre premier.

(2) Déduire de (1) que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots p-1\}$, on a $p \,|\binom{p}{k}$.

(3) Montrer par récurrence (sur n) que pour tout entier naturel n, $p\,|(n^p - n)$.
Indice. On pourra utiliser *sans la démontrer* la formule du binôme de Newton:
$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}.$$

Remarque. Le résultat démontré au point (3) s'appelle *Petit Théorème de Fermat.*

Exercice 4. (4 points)
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x^2 - 2|$.

(1) Représenter graphiquement f (en particulier, préciser ses points d'intersection avec les axes).

(2) a. Déterminer graphiquement le cardinal de l'ensemble
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2-2| = y\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = t\}$$
en fonction de t.

b. f est-elle injective ? surjective ? bijective ? (N'oubliez pas de justifier, même brièvement, vos réponses.)

(3) Déterminer graphiquement $f^{-1}([1,+\infty[) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [1,+\infty[\}$.

Exercice 5. (5 points)
On considère l'ensemble $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x\}$. Pour $(x,y) \in T$, on appelle rect(x,y) le rectangle de $\mathbb{R}^2$ de sommet inférieur gauche le point de coordonnées $(0,0)$ et de sommet supérieur droit le point de coordonnées (x,y).

(1) On définit $\mathcal{A} : T \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ l'application qui à $(x,y) \in T$ associe l'aire du rectangle rect(x,y). Est-elle surjective ? injective ? bijective ?

(2) On définit $\mathcal{P} : T \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ l'application qui à $(x,y) \in T$ associe le périmètre du rectangle rect(x,y). Est-elle surjective ? injective ? bijective ?

(3) On considère l'application $\mathcal{S}\colon T \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ définie par la formule
$$\mathcal{S}(x,y) = (\mathcal{A}(x,y), \mathcal{P}(x,y))$$
Montrer que $\mathcal{S}$ n'est pas surjective et *(difficile !)* qu'elle est injective.