Contrôle 2

Durée : 2h
Mercredi 01 Décembre 2010
Documents et calculatrice interdits.

Les exercices sont largement indépendants.

Exercice 1 : Fonctions inverses

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan(x).$$

1. Calculer la dérivée de la fonction f et en déduire une expression simplifiée de f.
2. On va maintenant retrouver ce résultat en utilisant des relations trigonométriques et en posant $x = \tan t$ avec $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   (a) Exprimer $\sqrt{1+x^2} - x$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
   (b) Montrer que pour $u \in \mathbb{R}$, $2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} - u)$.
   (c) Montrer que pour $u \in \mathbb{R}$, $2\sin^2\frac{u}{2} = 1 - \sin(\frac{\pi}{2} - u)$.
   (d) Poser $t = \frac{\pi}{2} - u$ dans les relations précédentes et en déduire l'expression de f.

Exercice 2 : Intégrales

On définit les fontions h, H et F par $h(x) = e^x \sin(e^x)$, $H(x) = \int_0^x h(t)dt$ et

$$F(x) = \int_{\ln(2x+2)}^{\ln(4x)} e^t \sin(e^t)dt.$$

1. Exprimer F en fonction de H et justifier que F est continue et dérivable en précisant son domaine de définition.
2. En déduire F'.
3. En déduire F à une constante près.
4. Déterminer cette constante en utilisant une valeur particulière de x dans l'expression intégrale de F.
5. Retrouver le résultat précédent en utilisant un changement de variable (Question indépendante des précédentes).

Exercice 3 : Développements limités

Remarque : Vous pourrez utiliser les résultats donnés aux questions 1 et 2 dans la suite de l'exercice même si vous n'avez pas réussi à les démontrer.

1. En utilisant la formule de Taylor, montrer que le DL en 0 à l'ordre 3 de $g(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ est
$$g(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3).$$
Astuce : On pourra exprimer g' en fontion de g.
2. En utilisant les développements limités usuels, montrer que le DL en 0 à l'ordre 3 de $h(x) = \frac{1}{(1-\sin x)^2}$ est
$$h(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 + o(x^3).$$
3. Donner le DL de f en 0 à l'ordre 3 avec
$$f(x) = 3\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{2}{(1-\sin x)^2}.$$
4. Donner l'équation de la tangente de f en 0.
5. Tracer l'allure de f au voisinage de 0 (par rapport à la tangente).
6. Donner la limite de $\frac{h(x)-g(x)}{1-\cos x}$ quand $x \to 0$.
7. Donner la limite de $\frac{h(x)-(1+x)^2}{\ln(1+x)}$ quand $x \to 0$.

Corrigé du Contrôle 2 du Mercredi 01 Décembre 2010

Exercice 1 :

1.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-1\right)\frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2}+\frac{1}{1+x^2}\\
&= 2\left(\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{1}{2(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})}+\frac{1}{1+x^2}\\
&= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-x)}+\frac{1}{1+x^2}\\
&= \frac{-1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=0
\end{aligned}$$

f est donc une constante et $f(x)=f(0)=2\arctan(1)=\frac{\pi}{2}$ pour $x\in\mathbb{R}$.

2. (a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x^2}-x &= \sqrt{1+(\tan t)^2}-\tan t=\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}-\frac{\sin t}{\cos t}\\
&= \sqrt{\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}}-\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{1}{|\cos t|}-\frac{\sin t}{\cos t}\\
&\quad \text{car } |\cos t|=\cos t>0 \text{ pour } t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ donc}\\
\sqrt{1+x^2}-x &= \frac{1-\sin t}{\cos t}
\end{aligned}$$

(b) On utilise $\sin u=2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}$ et $\sin u=\cos(\frac{\pi}{2}-u)$

(c) On utilise $1-\cos u=2\sin^2\frac{u}{2}$ et $\cos u=\sin(\frac{\pi}{2}-u)$

(d)

$$\sqrt{1+x^2}-x=\frac{1-\sin t}{\cos t}=\frac{2\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}-t}{2}}{2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-t}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-t}{2}}=\tan\frac{\frac{\pi}{2}-t}{2}$$

donc $f(x)=2\frac{\frac{\pi}{2}-t}{2}+t=\frac{\pi}{2}$

Exercice 2 :

1. $F(x) = H(\ln(4x)) - H(\ln(2x+2))$, H est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(4x)$ et $x \mapsto \ln(2x+2)$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. $H' = h$ donc $F'(x) = \frac{4}{4x}h(\ln(4x)) - \frac{2}{2x+2}h(\ln(2x+1)) = 4\sin(4x) - 2\sin(2x+2)$
3. $F(x) = \cos(2x+2) - \cos(4x) +$ cste
4. On prend $x = 1$, on a alors $F(1) = 0$ et la constante est nulle d'où $F(x) = \cos(2x+2) - \cos(4x)$
5. On pose $u = e^t$

$$F(x) = \int_{\ln(2x+2)}^{\ln(4x)} e^t \sin(e^t)dt = \int_{2x+2}^{4x} \sin(u)du = [-\cos u]_{2x+2}^{4x}$$

Exercice 3 :

1. $g(0) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$.
   $g'(x) = 1 + \tan(x + \frac{\pi}{4})^2 = 1 + g(x)^2$ donc $g'(0) = 1 + g(0) = 2$.
   $g'' = 2g'g$ donc $g''(0) = 2g'(0)g(0) = 4$.
   $g^{(3)} = 2g''g + 2g'^2$ donc $g^{(3)}(0) = 2g''(0)g(0) + 2g'(0)^2 = 16$
   On écrit ensuite

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

2. Calcul de DL
3. $f(x) = 1 + 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$
4. $y = 1 + 2x$ (Ordre 1 du DL)
5. Le signe de $\frac{2}{3}x^3$ indique que la courbe de f est sous la tangente pour $x < 0$ et au dessus pour $x > 0$
6. $h(x) - g(x) = x^2 + o(x^2)$ et $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ donc

$$\frac{h(x) - g(x)}{1 - \cos x} = 2 + o(1)$$

7. $h(x) - (1+x)^2 = 3x^2 + o(x^2)$ et $\ln(1+x) = x + o(x)$ donc

$$\frac{h(x) - (1+x)^2}{\ln(1+x)} = 3x + o(x) = 0 + o(1)$$