Polytech' Paris-Sud — 2011–2012
Orsay — S1-MathInfo

Contrôle continu de Mathématiques n°3

du mercredi 30 novembre 2011 — Durée : 2h.
Calculatrices interdites.
La feuille des développements usuels est le seul document autorisée.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 5 exercices **indépendants**.
Toute réponse se doit d'être **justifiée**.

Exercice 1. (3 points)

Donner un développement limité de $\cos(e^x - \cos(x))$ à l'ordre 4.

Exercice 2. (3 points)

Calculer à l'aide d'un développement limité les limites des fonctions suivantes en $x = 0$:

$$a(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \qquad b(x) = \frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2} \qquad c(x) = \frac{1}{\sin(x)^3} - \frac{1}{x^3}$$

Exercice 3. (6 points)

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = x\ln(x)^2 \qquad g(x) = e^{2x}\sin(3x) \qquad h(x) = e^{\cos(x)}\sin(2x).$$

Exercice 4. (6 points) Maxima et minima

Soit $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x} - \sin(2x)}{x}$.

(1) Montrer que f se prolonge en zéro par continuité.

(2) Utilisant un développement limité, montrer que la dérivée en zéro est nulle. S'agit-il d'un maximum local, minimum local ou d'un point d'infléxion ?

(3) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

(4) Montrer que la dérivée du numérateur (seulement) est positive. En déduire (s'ils existent) le maximum et le minimum global de f.

Exercice 5. (6 points) Intégrales infinies

On note $f_\alpha(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$.

(1) Donner une primitive de f_α pour $\alpha \neq 1$.

(2) En déduire la valeur de $I_\alpha(x) = \displaystyle\int_x^1 f_\alpha(t)\,dt$ pour $0 < x < 1$. Calculer la limite lorsque $x \to 0^+$ et dire pour quelles valeurs de α elle est finie.

(3) De même, déduire la valeur de $J_\alpha(y) = \displaystyle\int_1^y f_\alpha(t)\,dt$ pour $y > 1$ et décider quand $\displaystyle\lim_{y\to\infty} J_\alpha(y)$ est finie en fonction de α.

(4) Faire le changement de variables $t = \frac{1}{u}$ et déduire une relation entre I et J.

(5) Montrer que l'étape précédente reste valide pour $\alpha = 1$. Calculer $\displaystyle\lim_{y\to\infty} J_1(y)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} I_1(x)$.

(6) Calculer alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{1/x} f_\alpha(t)\,dt$.