Polytech' Paris-Sud — Orsay — 2010–2011 — S1-Math2

Corrigé du Contrôle de Mathématiques n°1 (Math2)
du Lundi 11 Octobre 2010

Exercice 1

1. L'assertion $\mathcal{P}$ est vraie. En effet, si $x \geqslant 3$, alors $x^2+4x+6 \geqslant 9+12+6 \geqslant 27$. Donc
$$x \geqslant 3 \Rightarrow \ln(x^2+4x+3) \geqslant \ln 27 = \ln 3^3 = 3\ln 3.$$
2. La négation de $\mathcal{P}$ s'écrit :
$$\exists x \in \mathbb{R} \quad (x \geqslant 3)\,\text{et}\,(\ln(x^2+4x+6) < 3\ln 3).$$
Cette proposition est évidemment fausse, puisque $\mathcal{P}$ est vraie.
3. La contraposée de $\mathcal{P}$ s'écrit :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \big(\ln(x^2+4x+6) < 3\ln 3\big) \Rightarrow (x < 3).$$
Comme $\mathcal{P}$ est vraie, la contraposée de $\mathcal{P}$ est également vraie.
4. La réciproque de $\mathcal{P}$ s'écrit :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \big(\ln(x^2+4x+6) \geqslant 3\ln 3\big) \Rightarrow (x \geqslant 3).$$
Elle est fausse. En effet, pour $x = -10$ par exemple, on a $\ln(x^2+4x+6) = \ln 66 \geqslant 3\ln 3$ et pourtant $x < 3$.

Exercice 2

1. Si n est pair alors n^3 l'est aussi car $2|n \Leftrightarrow 2|n^3$, et $5n$ est aussi pair comme produit d'un nombre impair et d'un nombre pair. Ainsi n^3+5n est pair en tant que somme de deux entiers pairs. De même, si n est impair, alors n^3 l'est également et $5n$ aussi comme produit de deux nombres impairs. Donc n^3+5n est pair, en tant que somme de deux entiers impairs. Finalement $\forall n \in \mathbb{N}\ \ n^3+5n \in 2\mathbb{N}$.
2. Distinguons 3 cas :
   - soit $n = 0[3]$, mais alors $n^3+5n = 0^3+5\times 0[3] = 0[3]$ donc $3|n^3+5n$.
   - soit $n = 1[3]$, alors $n^3+5n = 1^3+5\times 1[3] = 6[3] = 0[3]$, donc $3|n^3+5n$.
   - soit $n = 2[3]$, alors $n^3+5n = 2^3+5\times 2[3] = 18[3] = 0[3]$, donc à nouveau $3|n^3+5n$.

   Finalement dans tous les cas, $n^3+5n \in 3\mathbb{N}$.

3. Comme les multiples de 3 pairs sont les multiples de 6, on déduit des deux questions précédentes que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 5n \in 6\mathbb{N}$

Exercice 3

1. La phrase énoncée se traduit par : $\forall x \in E \quad ((x \in A) \text{ et } (x \in C)) \Rightarrow (x \notin D)$. On peut aussi écrire $(A \cap C) \subset \overline{D}$.
2. L'assertion $B \cap C = \varnothing$ signifie qu'il n'existe pas d'espèce pouvant voler et ayant des écailles.
3. L'assertion $(\exists x \in A)(\forall y \in C)((x, y) \in F)$ signifie qu'il y a des espèces vivant en Afrique qui se nourrissent de toutes les espèces pouvant voler. Sa négation s'écrit $(\forall x \in A) \quad (\exists y \in C) \quad ((x, y) \notin F)$, ce qui signifie que toute espèce vivant en Afrique connaît une espèce pouvant voler dont elle ne se nourrit pas.
4. On a $G = (A \cap D) \cap (\overline{C} \cup \overline{B}) = (A \cap D) \cap (\overline{C \cap B}) = (A \cap D) \backslash (C \cap B)$.

Exercice 4

1. Voir la figure ci-dessous.

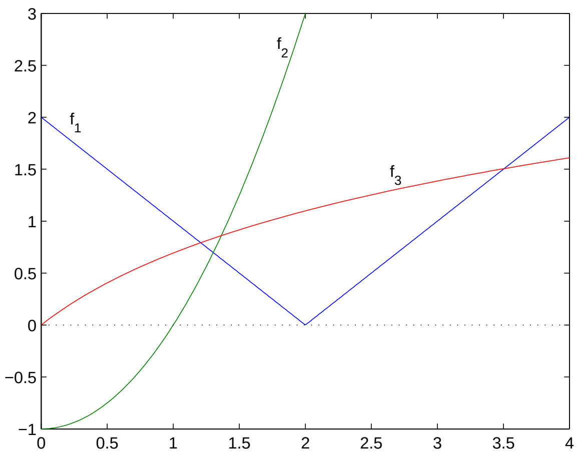

Figure 1 – Tracé des fonctions f_1, f_2 et f_3.

2. La fonction f_1 n'est pas injective car $f_1(1) = f_1(3) = 1$. Elle n'est pas surjective car $f_1([0, 4]) \subset [0, 2]$. Elle n'est donc pas non plus bijective. La fonction f_2 est injective car elle est strictement croissante. Elle est aussi surjective car $f_2([0, 2]) = [-1, 3]$. Elle est donc bijective. Enfin, la fonction f_3 est injective car strictement croissante. Par contre elle n'est pas surjective car $f_3([0, 4]) \subset \mathbb{R}^+$. Elle n'est donc pas non plus bijective.
3. On lit graphiquement que $f_2([1, 2]) = [0, 3]$, $f_1([0, 2]) = [0, 2]$, $f_1^{-1}(]1, 2[) =]0, 1[\cup]3, 4[$, et $f_3^{-1}([1, +\infty[) = [e - 1, 4]$.

4. Sur $[0,2]$, f_1 est décroissante et f_3 est croissante, la fonction $f_3 \circ f_1$ est donc décroissante comme composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante. Sur $[2,4]$, f_1 est croissante et f_3 est croissante, la fonction $f_3 \circ f_1$ est donc croissante comme composée de deux fonctions croissantes.

Exercice 5

1. L'application c est à la fois injective et surjective : il y a une correspondance unique entre chaque sport et le club qui lui est associé. L'application c est donc bijective.
2. On voit que tout élément de H a un antécédent par h dans Club. L'application h est donc surjective. Elle n'est par contre pas injective puisque $h(\text{AS Villebon}) = h(\text{Judo Club Choisy le Roi}) = 2$. Elle n'est donc pas non plus bijective. D'après le tableau donné, on a
$$h^{-1}(\{2,12\}) = \{\text{AS Villebon}, \text{JC Choisy le Roi}, \text{Club nautique Longjumeau}\}.$$
3. On voit que chaque étudiant a choisi un sport différent, s est donc injective. Par contre, aucun étudiant ne fait du tennis de table par exemple, s n'est donc pas surjective, et pas non plus bijective. On lit
$$s^{-1}(\text{Sportco}) = \{\text{Florian}, \text{Frédéric}, \text{Rémy}, \text{Clément}\}.$$
4. Si E comportait 40 étudiants, alors E comporterait plus d'éléments que Sport, et s ne pourrait donc pas être injective : plusieurs étudiants devraient forcément faire le même sport. Elle ne serait pas pour autant forcément surjective, puisque les 40 étudiants pourraient très bien tous avoir choisi le même sport.
5. On a
$$f^{-1}(\{2,4,6\}) = \{\text{Florian}, \text{Frédéric}, \text{Rémy}, \text{Xavier}, \text{Lise}, \text{Yohann}\}.$$
L'application f n'est pas surjective puisque par exemple $12 \notin f(E)$. Elle n'est pas non plus injective puisque $f(\text{Florian}) = f(\text{Rémy}) = 4$. Elle n'est donc pas bijective.
6. L'application f s'écrit comme composée des fonctions c, h et s : on a
$$f = h \circ c \circ s.$$