Polytech Paris-Sud
PeiP1
Année 2010-2011

Correction du contrôle continu de Maths 1

Exercice 1 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exercice 2

(i) La fonction f est la somme des fonctions $x \mapsto x$ et sin qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, elle est dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 1 + \cos(x).$$
Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$ et de plus $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x \in \{\pi + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. La dérivée de f est strictement positive sauf en des points isolés, donc f est strictement croissante.

(iii) On a vu que f était strictement croissante, donc f est injective. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$x - 1 \leq x + \sin(x) \leq x + 1.$$
Par encadrement, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Comme f est continue, on obtient $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. La fonction f est donc surjective. Ainsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.

(iv) La fonction f est continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc sa réciproque f^{-1} existe, et est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(v) Comme $f'(x)$ est nulle pour x de la forme $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, f^{-1} n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. Supposons en effet qu'elle l'est. Alors comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = f^{-1} \circ f(x)$, on obtient en dérivant
$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 = (f^{-1})'(f(x))f'(x).$$
Pour $x = \pi$, cette égalité devient
$$1 = (f^{-1})'(f(\pi)) \times 0.$$
ce qui est absurde. On en déduit que f^{-1} n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Montrons tout d'abord que f est continue sur $]-1, 1[$. Pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) = x/(1 - x)$ donc par compostion et produit, f est continue sur $]0, 1[$. Pour tout $x \in]-1, 0[$, $f(x) = \ln(1 + x)$ donc par composition f est continue sur $]-1, 0[$. De plus,
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 0 = f(0).$$
La fonction f est donc continue en 0.

Pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) = x/(1 - x)$ donc par composition et produit, f est de classe C^1 sur $]0, 1[$. On a
$$f'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2}$$
pour $x \in]0, 1[$. Pour tout $x \in]-1, 0[$, $f(x) = \ln(1 + x)$ donc par composition f est de classe C^1 sur $]-1, 0[$. On a
$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}$$
pour $x \in]-1, 0[$.

Ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

Par le théorème de prolongement C^1, on en déduit que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$ et que f' est continue sur $]-1,1[$. On a bien montré que f est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

Remarque : On a, pour tout $x \in [0,1[$,

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

et la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

est bien dérivable sur son domaine de définition $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$, mais on ne peut pas en déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$. Tout ce que l'on peut dire, c'est que f a une *dérivée à droite* en 0 et que $f'_d(0) = 1$. Il reste montrer qu'il existe aussi une dérivée à gauche en 0 qui a la même valeur, et c'est ce que nous dit le théorème de prolongement C^1.

Exercice 4

1. Par composition, produit et somme de fonctions continues, f est continue sur $]0,1[$. Étudions la continuité de f en 0. On a $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ (limite usuelle), $\lim_{x\to 0^+}(1-x)\ln(1-x) = 1\times 0 = 0$ par produit, et donc par somme
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$
La fonction f est donc continue en 0. D'autre part, en utilisant la relation $f(1-x) = f(x)$ on a,
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(1-x) = \lim_{y\to 0^+} f(y) = 0 = f(1).$$
La fonction f est donc également continue en 1.

2. Par composition, produit et somme de fonctions dérivables, f est dérivable sur $]0,1[$. Montrons que f n'est pas dérivable en 0. Étudions pour ceci le taux d'accroissement de la fonction en 0 (il s'agit en fait du taux d'accroissement à droite de 0).
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = -\ln(x) - \frac{1-x}{x}\ln(1-x).$$
On a
$$\lim_{x\to 0^+} -\ln(x) = +\infty$$
et
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1.$$
En effet, on reconnait pour la dernière limite la dérivée à droite en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$. On a par produit
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{x}\ln(1-x) = -1$$
d'où, par somme,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$
La fonction f n'est donc pas dérivable au point 0. De plus
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-} \frac{f(1-x)}{1-x} = -\lim_{y\to 0^+} \frac{f(y)}{y} = -\infty.$$
La fonction f n'est donc pas non plus dérivable au point 1.

3. Dressons le tableau de variation de la fonction f. Pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f'(x) = -\ln(x) - x\frac{1}{x} + \ln(1-x) + (1-x)\frac{1}{1-x} = \ln(\frac{1-x}{x}).$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	
	0				0

Le maximum de f est atteint en un unique point, $x = 1/2$, et la valeur de ce maximum est $\ln(2)$.

Exercice 5

1. La fonction f_a est polynômiale donc dérivable (en particulier continue) sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = 3ax^2 + 1 > 0$. La fonction f_a est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, f_a est injective. On a pour $x \neq 0$

$$f_a(x) = x^3 \left(a + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right),$$

donc, par produit, $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$. Comme f_a est continue, $f_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, c'est à dire que la fonction f_a est surjective. La fonction f_a est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et en particulier l'équation $f_a(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on note $z(a)$. De plus, $f_a(-1) = -a$ et $f_a(0) = 1$. Les deux valeurs sont de signes opposés, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $z(a) \in]-1, 0[$.

2. Par définition de $z(a)$,

$$az(a)^3 + z(a) + 1 = 0,$$

donc

$$z(a)^3 = \frac{-1 - z(a)}{a}.$$

Comme $z(a) < 0$,

$$z(a)^3 > -\frac{1}{a}$$

d'où

$$z(a) > -\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

(car la fonction racine cubique est strictement croissante). On a l'encadrement

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{a}} < z(a) < 0$$

et on en déduit $\lim_{a\to+\infty} z(a) = 0$ par le théorème des gendarmes.

3. Comme $\sqrt[3]{a}z(a) = \sqrt[3]{-1 - z(a)}$, on déduit de la question précédente que $\lim_{a\to+\infty} \sqrt[3]{a}z(a) = -1$.

4. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction f, il existe $c(a) \in]-1, z(a)[$ tel que

$$\frac{f_a(z(a)) - f_a(-1)}{z(a) - (-1)} = f_a'(c(a)),$$

c'est à dire

$$\frac{a}{z(a) + 1} = 3ac(a)^2 + 1.$$

Pour tout $a > 0$, $-1 < c(a) < z(a) < 0$, donc $a \mapsto c(a)$ est bornée. Par produit, $\lim_{a\to0^+} 3ac(a)^2 = 0$. Comme

$$\frac{z(a) + 1}{a} = \frac{1}{3ac(a)^2 + 1},$$

on conclut que

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{z(a)+1}{a} = 1.$$

On en déduit que

$$\lim_{a \to 0^+} (z(a)+1) = \lim_{a \to 0^+} a \frac{z(a)+1}{a} = 0,$$

donc que $\lim_{a \to 0^+} z(a) = -1$.

Remarque : On peut reformuler les résultats des deux dernières questions de cet exercice en terme de développements limités de la fonction $a \mapsto z(a)$. On a trouvé

$$z(a) = -\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right) \text{ lorsque } a \to +\infty$$

et

$$z(a) = -1 + a + o(a) \text{ lorsque } a \to 0^+.$$

La première écriture signifie que

$$z(a) = -\frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{\varepsilon(a)}{\sqrt[3]{a}},$$

où ε est une fonction de a telle que

$$\lim_{a \to +\infty} \varepsilon(a) = 0.$$