Math203 – Analyse et Convergence II
Un corrigé du devoir maison 2

Exercice 1

A Fonction Zeta

Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ et on note $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. La série numérique $\sum_{n\geq 1} 1/n^x$ est une série de Riemann de paramètre x. Elle converge lorsque $x > 1$. La fonction ζ est donc définie sur $]1,+\infty[$.
2. Les fonctions f_n sont infiniment dérivables sur $]1,+\infty[$ et pour tout entier r (y compris $r = 0$) on a $f_n^{(r)}(x) = (e^{-x\ln(n)})^{(r)} = (-\ln(n))^r e^{-x\ln(n)} = \frac{(-\ln(n))^r}{n^x}$.
   On fixe $\alpha_0 > 1$, et pour tout $x \geq \alpha_0$, on a $|f_n^{(r)}(x)| \leq \frac{(\ln(n))^r}{n^{\alpha_0}}$. Or ce dernier terme $\frac{(\ln(n))^r}{n^{\alpha_0}}$ est le terme général d'une série de Bertrand convergente. Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n^{(r)}$ est normalement convergente sur $[\alpha_0,+\infty[$.
3. Un théorème du cours dit que, si les f_n sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I, si la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge sur I et si les séries dérivées successives $\sum_{n\geq 1} f_n^{(r)}$ convergent normalement sur I pour tout entier $1 \leq r \leq k$, alors la fonction somme $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. On en déduit que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[\alpha_0,+\infty[$, ceci pour tout $\alpha_0 > 1$ et tout entier k. Il en résulte que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
   On a de plus $f'(x) = \sum_{n\geq 1} f_n'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{-\ln(n)}{n^x} < 0$ et donc f est décroissante sur $]1,+\infty[$. De même, on a $f''(x) = \sum_{n\geq 1} f_n''(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\ln^2(n)}{n^x} > 0$ et f est donc convexe sur $]1,+\infty[$.
4. On remarque d'abord que $\lim_{x\to+\infty} 1/n^x = 0$ dès que $n \geq 2$. D'autre part, on a vu précédemment que $\sum_{n\geq 1} 1/n^x$ converge normalement sur (par exemple) $[2,+\infty[$. On peut donc intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie :
   $$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1 + \sum_{n\geq 2} \lim_{x\to+\infty} 1/n^x = 1.$$
5. On fixe le réel $x > 1$. La fonction $t \mapsto 1/t^x$ est alors décroissante sur $]0,+\infty[$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [n,n+1]$ l'encadrement $1/(n+1)^x \leq 1/t^x \leq 1/n^x$.

On intègre cet encadrement entre n et $n+1$ et on obtient $1/(n+1)^x \leq \int_n^{n+1} dt/t^x \leq 1/n^x$. On somme alors ces encadrements pour n allant de 1 à N et on obtient

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}.$$

La première somme s'écrit $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^x} = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^x}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$ est une intégrale de Riemann convergente car $x > 1$. On peut donc faire tendre N vers $+\infty$ dans l'encadrement $(*)$ et il en résulte l'encadrement $\zeta(x) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x)$ puis, finalement,

$$(**) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}.$$

On a facilement $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$. Grâce à $(**)$, on a donc $1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$. En utilisant le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{x \to 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1$ et, finalement,

$$\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

B Fonction Theta

Pour $x \in]0, +\infty[$, on note $\Theta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Dans un premier temps on fixe $x > 0$. La série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} f_n(x)$ est une série alternée et son terme général vérifie les deux propriétés suivantes : $|(-1)^{n+1} f_n(x)| = 1/n^x$ décroît en n et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On peut donc utiliser le critère des séries alternées et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
   Les fonctions $g_n = (-1)^{n+1} f_n$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, on va montrer que pour tout réel $\beta > 0$ la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n'$ converge uniformément sur $[\beta, +\infty[$. On en déduira que Θ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\beta, +\infty[$ pour tout $\beta > 0$ et donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
   On a $g_n'(x) = (-1)^{n+1} f_n'(x) = (-1)^n \ln(n)/n^x$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(x)$ est une série alternée dont le terme général vérifie : $|g_n'(x)| = \ln(n)/n^x$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et décroît en n quand $n \geq n_x$ où $n_x = \lfloor e^{1/x} \rfloor + 1$ ($\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière du réel a). Voici l'argument qui permet de démontrer la deuxième propriété. Pour $x > 0$ fixé, on étudie la fonction $h : t \mapsto \ln(t)/t^x$ sur $[1, +\infty[$. On la dérive : $h'(t) = t^{x-1}(1 - x\ln(t))/t^{2x}$ et h est donc décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$.

   Ces propriétés étant vérifiées, on peut appliquer le critère des séries alternées à la série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(x)$. Tout d'abord celle-ci converge, mais surtout on peut majorer le reste de rang n de cette série lorsque $n \geq n_x$. Soyons plus précis. On se donne un

$\beta > 0$ quelconque. Pour tout $n \geq n_\beta = \lfloor e^{1/\beta} \rfloor + 1$, on a pour tout $x \geq \beta$,

$$|\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k'(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^\beta}$$

autrement dit,

$$\sup_{x \in [\beta, +\infty[} |\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k'(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^\beta}.$$

Comme $\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^\beta}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} f_n'$ converge uniformément sur $[\beta, +\infty[$ et on conclut.

2. L'encadrement résulte de l'inégalité des accroissements finis. Précisément, pour $x > 0$ fixé, on considère la fonction $\phi : t \mapsto -1/t^x$ sur $[1, +\infty[$. On a $\phi'(t) = x/t^{x+1}$. La fonction ϕ' étant décroissante sur $[1, +\infty[$, on a l'encadrement

$$x/(2n+1)^{x+1} \leq \int_{2n}^{2n+1} \phi'(t)\, dt \leq x/(2n)^{x+1}$$

pour tout entier $n \geq 1$. Or on a $\int_{2n}^{2n+1} \phi'(t)\, dt = \phi(2n+1) - \phi(2n) = 1/(2n)^x - 1/(2n+1)^x$. Par ailleurs, il est évident que $\frac{x}{(2n+2)^{x+1}} \leq \frac{x}{(2n+1)^{x+1}}$. On en déduit

$$\frac{x}{(2n+2)^{x+1}} \leq \frac{1}{(2n)^x} - \frac{1}{(2n+1)^x} \leq \frac{x}{(2n)^{x+1}}.$$

On somme ces encadrements pour n allant de 1 à N :

$$\frac{x}{2^{x+1}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^{x+1}} \leq \sum_{k=2}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{k^x} \leq \frac{x}{2^{x+1}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{x+1}}.$$

Lorsqu'on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient l'encadrement :

$$\frac{x}{2^{x+1}}(\zeta(x+1) - 1) \leq 1 - \Theta(x) \leq \frac{x}{2^{x+1}} \zeta(x+1).$$

D'après **A**.5, on sait que $x\zeta(x+1)$ tend vers 1 quand x tend vers 0^+. Les membres de gauche et de droite dans l'encadrement convergent donc tous les deux vers $1/2$. On en déduit grâce au théorème des gendarmes que $1 - \Theta(x)$ tend vers $1/2$ quand x tend vers 0^+. Il en va donc de même pour $\Theta(x)$ car $\Theta(x) = 1 - (1 - \Theta(x))$.

Exercice 2

1. On rappelle que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est positive et décroissante donc $a_n \leq a_1$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout entier $n \geq 1$, on a

$$0 \leq u_n(x) \leq a_1(1-x)x^n.$$

Si $x = 1$, on a $u_n(1) = 0$ et la série $\sum_{n\geq 1} u_n(1)$ converge.
Si $x \in [0, 1[$, le terme $a_1(1-x)x^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente et, par comparaison, $u_n(x)$ est le terme général d'une série convergente. On a montré que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

2. On étudie les variations de la fonction u_n sur $[0, 1]$. On a $u'_n(x) = a_n x^{n-1}\big(n-(n+1)x\big)$ et la fonction u_n est donc croissante sur $[0, \frac{n}{n+1}]$ et décroissante sur $[\frac{n}{n+1}, 1]$. Comme $u_n(0) = u_n(1) = 0$, on en déduit $\sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = u_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{a_n}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n}$. Il est bien connu que $(1+\frac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e$. Cela résulte du calcul suivant : $(1+\frac{1}{n})^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{n(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\epsilon_n)} = e^{1+\epsilon_n} \to e$ quand $n \to +\infty$ car $\epsilon_n \to 0$. On a donc $\sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{en}$. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge.
3. Comme la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est positive et décroissante, on en déduit que pour tout $k \geq n+1$ on a $l \leq a_k \leq a_{n+1}$. On a donc l'encadrement

$$(*) \qquad lx^k(1-x) \leq a_k x^k(1-x) \leq a_{n+1}x^k(1-x).$$

pour tout $x \in [0, 1]$ et tout entier $k \geq n+1$. Pour $x \in [0, 1[$, on rappelle que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. On somme les inégalités $(*)$ pour k allant de $n+1$ à N et on fait tendre N vers $+\infty$. On en déduit, pour tout $x \in [0, 1[$

$$lx^{n+1} \leq R_n(x) \leq a_{n+1}x^{n+1}.$$

On a donc $0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1}$ pour tout $x \in [0, 1[$ et il en résulte $\sup\limits_{x\in[0,1[} |R_n(x)| \leq a_{n+1}$. D'autre part, pour tout $x \in [0, 1[$, on a $lx^{n+1} \leq \sup\limits_{x\in[0,1[} |R_n(x)|$. Il en résulte $l = \sup\limits_{x\in[0,1[} lx^{n+1} \leq \sup\limits_{x\in[0,1[} |R_n(x)|$. On a donc $l \leq \sup\limits_{x\in[0,1[} |R_n(x)| \leq a_{n+1}$. Comme on a $R_n(1) = 0$, il est clair que $\sup\limits_{x\in[0,1[} |R_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |R_n(x)|$ et on a bien

$$l \leq \sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| \leq a_{n+1}.$$

La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ si $\sup\limits_{x\in[0,1]} |R_n(x)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire si et seulement si la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers la limite $l = 0$.
4. On doit déterminer une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ pour laquelle la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ mais pas normalement, c'est-à-dire une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers 0 mais telle que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$ diverge. On peut proposer par exemple $a_1 = 1$ et $a_n = \frac{1}{\ln(n)}$ pour $n \geq 2$. En effet $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 mais la série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.