Polytech' Paris-Sud — 2011–2012
Orsay — S1-MathInfo

# Corrigé du contrôle continu de Mathématiques n°3

du mercredi 30 novembre 2011 — Durée : 2h.

---

**Exercice 1. (3 points)**

Donner un développement limité de $\cos(e^x - \cos(x))$ à l'ordre 4.

---

On a $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ et $\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$ , donc $e^x-\cos(x) = x+x^2+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ .
Injectant cela dans le $\mathrm{DL}_4$ de $\cos(x)$ en 0, il vient

$$\begin{aligned}\cos(e^x - \cos(x)) &= 1 - \frac{1}{2}\left(x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^4 + o(x^4)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x^3 + x^4 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + \frac{1}{24}(x^4 + o(x^4)) + o(x^4)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{5x^4}{8} + o(x^4).\end{aligned}$$

---

**Exercice 2. (3 points)**

Calculer à l'aide d'un développement limité les limites des fonctions suivantes en $x = 0$ :

$$a(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \qquad b(x) = \frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2} \qquad c(x) = \frac{1}{\sin(x)^3} - \frac{1}{x^3}$$

---

Réduisant les fractions aux dénominateurs communs, on obtient

$$a(x) = \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} \qquad b(x) = \frac{x^2 - \sin(x)^2}{x^2\sin(x)^2} \qquad c(x) = \frac{x^3 - \sin(x)^3}{x^3\sin(x)^3}$$

Comme $x - \sin(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $a(x) = \dfrac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)}$ qui tend vers zéro lorsque $x \to 0$.

Dans la suite, on utilisera $(X^n - Y^n) = (X - Y)(X^{n-1} + X^{n-2}Y + \cdots + Y^{n-1})$ pour faire apparaître $x - \sin(x)$ dans les autres fractions.

On a alors $b(x) = \dfrac{(\frac{x^3}{6} + o(x^3))(2x + o(x))}{x^4 + o(x^4)} \to {}^1/_3$ quand $x \to 0$. Enfin, le numéreteur de $c(x)$ est

$$\begin{aligned}(\tfrac{x^3}{6} + o(x^3))(x^2 + x\sin(x) + \sin(x)^2) &= (\tfrac{x^3}{6} + o(x^3))(x^2 + x^2 + o(x^3) + (x + o(x^2))^2)\\ &= (\tfrac{x^3}{6} + o(x^3))(3x^2 + o(x^3)) = \tfrac{x^5}{2} + o(x^5).\end{aligned}$$

Comme le dénominateur est $x^6 + o(x^6)$, $c(x)$ n'a pas de limite lorsque $x$ tend vers zéro.

**Exercice 3. (6 points)**

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = x\ln(x)^2 \qquad g(x) = e^{2x}\sin(3x) \qquad h(x) = e^{\cos(x)}\sin(2x).$$

(1) Par parties deux fois, il vient :

$$\begin{aligned}\int x\ln(x)^2\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x)^2 - \int \frac{x^2}{2}\frac{2\ln(x)}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x)^2 - \int x^2\ln(x)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx\right) = \frac{x^2}{2}\ln(x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{4}.\end{aligned}$$

(2) On passe en complexes : $\int e^{2x}\sin(3x)\,dx = \frac{1}{2i}\int e^{2x+3ix} - e^{2x-3ix} = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{2x+3ix}}{2+3i} - \frac{e^{2x-3ix}}{2-3i}\right)\,dx.$

Multipliant par les conjugués et regroupant les termes réels et imaginaires :

$$\begin{aligned}\frac{1}{13\cdot 2i}\left((2-3i)e^{2x+3ix} - (2+3i)e^{2x-3ix}\right) &= \frac{2e^{2x}}{13\cdot 2i}(e^{3ix} - e^{-3ix}) - \frac{3ie^{2x}}{13\cdot 2i}(e^{3ix} + e^{-3ix}) \\ &= \frac{2}{13}e^{2x}\sin(3x) - \frac{3}{13}e^{2x}\cos(3x).\end{aligned}$$

(3) On pose $u = \cos(x)$, donc $u' = -\sin(u)du$, et ensuite on intègre par parties :

$$\begin{aligned}\int e^{\cos(x)}\sin(2x)\,dx &= \int e^{\cos(x)}2\cos(x)\sin(x)\,dx = \int e^u 2u\,(-du) \\ &= -\left(2ue^u - \int 2e^u\,du\right) = -2ue^u + 2e^u = -2\cos(x)e^{\cos(x)} + 2e^{\cos(x)}\end{aligned}$$

**Exercice 4. (6 points) Maxima et minima**

Soit $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x} - \sin(2x)}{x}$ .

(1) Montrer que $f$ se prolonge en zéro par continuité.

(2) Utilisant un développement limité, montrer que la dérivée en zéro est nulle. S'agit-il d'un maximum local, minimum local ou d'un point d'infléxion ?

(3) Déterminer les limites de $f$ en $\pm\infty$.

(4) Montrer que la dérivée du numérateur (seulement) est positive. En déduire (s'ils existent) le maximum et le minimum global de $f$.

(1) et (2) : Un DL à l'ordre 3 du numérateur donne

$$e^x - e^{-x} - \sin(2x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - (-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}) - (2x - \frac{8x^3}{6}) + o(x^3) = \frac{5x^3}{3} + o(x^3).$$

Ainsi, $f(x) = \frac{5x^2}{3} + o(x^2)$ pour $x$ proche de zéro, et s'y prolonge par 0. De plus, comme $f$ admet un DL à l'ordre 1 en 0 dont le coefficient de $x$ est nul, la dérivée de $f$ en ce point est nulle aussi.

Le DL à l'ordre 2 de $f(x)$ en zéro montre que c'est un minimum local.

(3) Tout d'abord, on remarque que $f$ est paire, comme quotient de deux fonctions impaires. Ainsi, il suffit de calculer la limite en $+\infty$, qui sera égale (si elle existe) à la limite en $-\infty$.

Or, pour $x \to +\infty$, le numérateur est dominé par le terme $e^x$, qui par croissance comparée avec $x$ donne alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

(4) La dérivée du numérateur est $e^x + e^{-x} - 2\cos(2x)$. Or, $y + \frac{1}{y} \geq 2$ pour tout $y$ positif, et comme cos est bornée par 1, cette dérivée est en effet positive.

Cela montre que $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ est le quotient de deux fonctions croissantes. En particulier, $N(x) > 0$ pour $x > 0$ car on a inégalité stricte $y + \frac{1}{y} > 2$ si $y \neq 1$, donc $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Comme $f$ est paire, $f(-x) > 0$ pour $x > 0$, donc le minimum de $f$ est 0, atteint uniquement en $x = 0$.

---

**Exercice 5. (6 points) Intégrales infinies**

On note $f_\alpha(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ .

(1) Donner une primitive de $f_\alpha$ pour $\alpha \neq 1$.

(2) En déduire la valeur de $I_\alpha(x) = \displaystyle\int_x^1 f_\alpha(t)\,dt$ pour $0 < x < 1$. Calculer la limite lorsque $x \to 0^+$ et dire pour quelles valeurs de $\alpha$ elle est finie.

(3) De même, déduire la valeur de $J_\alpha(y) = \displaystyle\int_1^y f_\alpha(t)\,dt$ pour $y > 1$ et décider quand $\lim_{y\to\infty} J_\alpha(y)$ est finie en fonction de $\alpha$.

(4) Faire le changement de variables $t = \frac{1}{u}$ et déduire une relation entre $I$ et $J$.

(5) Montrer que l'étape précédente reste valide pour $\alpha = 1$. Calculer $\lim_{y\to\infty} J_1(y)$ et $\lim_{x\to 0^+} I_1(x)$.

(6) Calculer alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{1/x} f_\alpha(t)\,dt$ .

---

(1) La primitive de $f_\alpha(t) = t^{-\alpha}$ est $\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

(2) $I_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha}(1 - x^{1-\alpha})$. La limite en $x \to 0^+$ sera finie si $1 - \alpha > 0 \iff \alpha < 1$ car alors $x^{1-\alpha} \to 0$. Dans ce cas, la limite vaut $\frac{1}{1-\alpha}$. Si $1 - \alpha < 1$, alors $x^{1-\alpha} \to +\infty$ lorsque $x$ tend vers zéro.

(3) $J_\alpha(y) = \frac{1}{1-\alpha}(y^{1-\alpha} - 1)$. La limite sera finie pour $y \to \infty$ si $1 - \alpha < 0$, donc $\alpha > 1$, et elle vaut alors $\frac{1}{\alpha-1}$. Si $\alpha < 1$, cette limite est infinie.

(4) $$I_\alpha(x) = \int_x^1 f_\alpha(t)\,dt = \int_{1/x}^1 f_\alpha(1/u)\,\frac{-du}{u^2} = \int_1^{1/x} \frac{1}{u^{-\alpha}}\,\frac{du}{u^2} = \int_1^{1/x} \frac{1}{u^{2-\alpha}}\,du = J_{2-\alpha}(1/x)\,.$$

(5) On n'a pas fait intervenir une primitive de $f_\alpha$, et non plus on n'a pas divisé par $1 - \alpha$. On voit alors que $I_1(x) = J_1(1/x)$, donc les deux limites sont égales. Comme $J_1(x) = \int_1^x \frac{dx}{x} = \ln(x)$, on voit que les limites sont $+\infty$.

(6) On calcule $I_\alpha(x) + J_\alpha(1/x) = I_\alpha(x) + I_{2-\alpha}(x)$ pour $x \to 0^+$.

Si $\alpha = 1$, c'est $2I_1(x)$ qu'on a déjà vu qu'elle diverge.

Sinon : la première est finie si est seulement si $\alpha < 1$, tandis que la deuxième sera finie pour $2 - \alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha > 1$. Ainsi, exactement une des limites sera $+\infty$ donc la somme aura cette même limite.