Chapitre 3

Séries de Fonctions

3.1 Quelques rappels sur les séries numériques

Les séries numériques doivent être vues comme des suites numériques particulières : si (u_n) est une suite numérique, la série de terme général u_n est la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p.$$

On dit que la série converge lorsque la suite (S_n) converge. Dans ce cas, la limite est appelée somme de la série, et on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} u_p.$$

On écrit aussi - de manière un peu abusive, mais c'est parfois pratique - que la quantité $\sum u_n$ est la série de terme général u_n, et que le nombre S_n est la n-ième somme partielle de la série.

Puisqu'il s'agit de suites particulières, les techniques vues pour étudier la convergence des suites s'appliquent à l'étude de la convergence des séries. Il existe bien sûr des techniques spécifiques, et l'on peut résumer l'étude d'une série numérique par l'algorithme de la Figure 3.1.

On peut aussi être amené à utiliser le critère de Cauchy pour la suite (S_n). Du fait de la nature particulière de cette suite, il prend la forme suivante : la série $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } q \geq p \geq N_\epsilon \Rightarrow |\sum_{n=p}^{q} u_n| \leq \epsilon.$$

3.2 Notion de série de fonction

Les séries de fonctions sont aussi un outil interne aux mathématiques. Comme pour les séries numériques, on doit garder à l'esprit qu'il s'agit d'un type particulier de suite de fonctions.

0. si $u_n \not\to 0$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

1. essayer de rechercher une formule explicite pour les sommes partielles S_n, et d'étudier la suite (S_n).

2. si $u_n \geq 0$ pour tout n, essayer d'utiliser l'un des critères suivant :
— comparaison avec une autre série.
— D'Alembert.
— Cauchy.
— Riemann.
— ...

2 bis. si $u_n \leq 0$ pour tout n, étudier la série de terme général $-u_n$.

3. si u_n n'est pas de signe constant, essayer
— d'étudier la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$. Si elle converge, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
— d'utiliser le "critère spécial" pour les séries alternées,
— ...

FIGURE 3.1 – Etude d'une série numérique

Reprenons par exemple notre équation différentielle préférée, ou plutôt le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f' = f, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Avec la méthode d'Euler, il est probablement assez pénible de trouver l'expression explicite de $f_n(x)$ pour un x donné, autrement dit de donner une valeur approchée de $f(x)$. Voici une autre façon de faire (c'est la méthode de Picard). Une fonction $f \in \mathcal{C}^1$ est solution du problème de Cauchy ci-dessus si et seulement si

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0) = 1 + \int_0^x f(t)dt.$$

On n'a rien gagné semble-t-il : la fonction inconnue f se trouve des deux côté de l'égalité. L'idée supplémentaire est de définir une suite de fonctions (S_n) par récurrence, en posant $S_0 : x \mapsto 1$ et

$$S_{n+1} : x \mapsto 1 + \int_0^x S_{n-1}(t)dt.$$

Si la suite (S_n) converge uniformément vers une fonction S, on doit avoir, pour chaque x

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_{n+1}(x) = \lim_{n\to+\infty} (1+\int_0^x S_{n-1}(t)dt) = 1+\int_0^x \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}(t)dt = 1+\int_0^x S(t)dt.$$

Autrement dit si la suite (S_n) converge, la limite de la suite (S_n) est la solution du problème : $S(x) = e^x$.

On peut calculer les fonctions S_n de proche en proche :

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x, \\
S_2(x) &= 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \\
&\vdots \\
S_n(x) &= \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!}.
\end{aligned}$$

Autrement dit, la fonction $x \mapsto e^x$ apparait comme la somme de la série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}$.

Définition 3.2.1 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. La série de fonctions de terme général f_n est la suite de fonction (S_n), où les S_n sont définies sur I par

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} f_p(x).$$

On dit aussi que la fonction S_n est la n-ième somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$.

3.3 Notions de convergence

Les deux notions de convergence vues pour les suites de fonctions sont bien sûr valables pour les séries de fonctions.

Définition 3.3.1 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement/uniformément sur I lorsque la suite (S_n) des sommes partielles converge simplement/uniformément.

Le cas échéant, la fonction limite S de la suite (S_n) est appelée somme de la série, et on note, pour $x \in I$,

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

On étudie par exemple la convergence de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ sur $I = \mathbb{R}$.

— On commence par la convergence simple. Soit $x \in I$. On doit étudier la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$, et on suit l'algorithme de la Figure 3.1. On peut par exemple appliquer le critère de D'Alembert pour la série de terme général $|u_n|$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Puisque cette limite est strictement inférieure à 1, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

— Passons à la convergence uniforme. Il s'agit d'étudier la suite de nombres

$$|S - S_n|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\sum_{p\geq n+1} \frac{x^n}{n!}|,$$

ce qui ne semble pas très facile ! On dispose heureusement d'un critère souvent commode.

3.4 Convergence normale

Définition 3.4.1 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I lorsqu'il existe une suite (a_n) de nombres réels positifs tels que

i) Pour tout $n \in N$, $|f_n|_\infty \leq a_n$,

ii) la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

Proposition 3.4.2 Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.

Preuve.— On va montrer que la suite de fonctions (S_n) des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy uniforme (cf. le Lemme 2.3.2). Soit (a_n) une suite de réels qui possède les propriétés (i) et (ii) de la Définition 3.4.1. Soit $\epsilon > 0$. Puisque la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, c'est une série de Cauchy : il existe $N_\epsilon > 0$ tel que

$$q \geq p \geq N_\epsilon \Rightarrow 0 \leq \sum_{n=p+1}^{q} a_n = |\sum_{n=0}^{q} a_n - \sum_{n=0}^{p} a_n| \leq \epsilon.$$

Or pour tout $x \in I$,

$$|S_q(x) - S_p(x)| \leq \sum_{n=p+1}^{q} |f_n(x)| \leq \sum_{n=p+1}^{q} a_n,$$

Donc

$$q \geq p \geq N_\epsilon \Rightarrow |S_q - S_p|_\infty \leq \epsilon.$$

□

Exercice 3.4.3 Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n(x) = x^n e^{-nx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$. On pourra montrer que $f_n(x) \leq e^{-n}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Revenons à l'exemple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$. Il est clair qu'on ne peut pas trouver de suite (a_n) telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\frac{x^n}{n!}| \leq a_n,$$

puisque $\frac{x^n}{n!} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Donc la série ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$. Cependant pour $x \in [-A, A]$, avec $A > 0$ fixé, on a

$$|\frac{x^n}{n!}| \leq \frac{A^n}{n!}.$$

Or $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ converge, comme on l'a vu en prouvant la convergence simple de la série. Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur $[-A, A]$, et ce pour tout $A > 0$. Ainsi cette série de fonctions converge uniformément sur tout compact (intervalle fermé et borné) de $\mathbb{R}$. En résumé :

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. La série de fonctions de terme général f_n

- — converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- — ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.
- — converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Il reste une question : la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$? La réponse est négative : si c'était le cas, la suite des restes $R_n(x) = \sum_{p\geq n+1} f_p(x)$ convergerait uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Mais alors, puisque

$$|f_{n+1}|_\infty = |R_n - R_{n-1}|_\infty \leq |R_n|_\infty + |R_{n-1}|_\infty,$$

chacune des fonctions f_n serait bornée sur $\mathbb{R}$. Ce n'est évidemment pas le cas.

3.5 Propriétés de la somme

Il s'agit juste de transposer les énoncés vus pour les suites de fonctions au cas particulier des séries de fonctions.

Proposition 3.5.1 Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues sur un intervalle I. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la fonction somme S est continue sur I.

Preuve.— Cela découle directement de l'application de la Proposition 2.1.1 à la suite de fonctions (S_n) des sommes partielles, puisque la continuité des f_n entraine celle des sommes (finies !) $S_n = \sum_{p=0}^n f_p$. □

Quand on applique cette proposition, il faut garder à l'esprit que la continuité est une notion locale : on parle de continuité sur l'intervalle I pour dire que la fonction est continue en chaque point de I. Autrement dit, si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur chaque compact de I, la fonction somme sera continue en chaque $x_0 \in I$. En effet, on peut appliquer la proposition sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ pourvu que $\alpha > 0$ soit suffisamment petit pour que ce compact soit inclus dans I. Autrement dit

Pour que la fonction somme d'une série de fonctions soit continue sur un intervalle I, il suffit que la série converge uniformément sur tout compact de I.

En particulier, on peut affirmer que la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$, bien que l'on ne sache pas si elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.5.2 Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle $I = [a, b]$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers sa somme S, alors

— la série numérique de terme général $\int_a^b f_n(x)dx$ converge,

— la fonction S est intégrable sur I, et

$$\int_a^b \sum_{n\geq 0} f_n(x)dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Preuve.— Il suffit là encore de remarquer que les sommes partielles $S_n = \sum_{p=0}^n f_p$ sont intégrables sur $[a, b]$ lorsque les f_n le sont, et d'appliquer la Proposition 2.2.1. □

Proposition 3.5.3 Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si

i) la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers sa somme S,

ii) la série des dérivées $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur I vers une fonction σ,

alors la fonction S est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $S'(x) = \sigma(x)$.

Autrement dit, lorsque les conditions de la propositions sont satisfaites,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\sum_{n\geq 0} f_n(x) = S'(x) = \sigma(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f_n(x).}$$

La dérivabilité aussi est une notion locale. On pourra se convaincre facilement que

> Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers sa somme S, il suffit que la série des dérivées converge uniformément sur tout compact de I pour que S soit dérivable et que $S'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x)$ pour tout $x \in I$.

Exercice 3.5.4 Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $I =]-1,1[$ par $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cdot$.

- La série de terme général f_n converge simplement sur I. En effet, pour $x \in]-1,1[$ fixé, quand $n \to +\infty[$,
$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = |x|\frac{n}{n+1} \to |x| < 1.$$
- Pour tout $A < 1$, la série de terme général $f_n'(x) = x^n$ converge normalement sur $[-A, A]$. En effet , pour $x \in [-A, A]$, $|f_n'(x)| \leq A^n$ et la série $\sum_{n\geq 0} A^n$ converge vers $\frac{1}{1-A}$. Donc la fonction somme S vérifie
$$S'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}\cdot$$

On obtient en particulier, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1} = S(x) = S(x) - S(0) = \int_0^1 S'(x)dx = -\ln(1-x).$$

3.6 A propos des séries entières

Le lecteur averti aura remarqué que la plupart des exemples de séries de fonctions qu'on a étudiés jusque là sont d'un type particulier.

> **Définition 3.6.1** On dit que la série de fonction de terme général f_n est une série entière lorsque pour tout $n \geq 0$, $f_n(x) = a_n x^n$, où $a_n \in \mathbb{C}$.

La convergence de ce genre de séries de fonctions est pour l'essentiel élucidé par la

Proposition 3.6.2 Il existe $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, unique, tel que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge simplement sur $]-R, R[$ et diverge sur $[-R, R]^c$. De plus, lorsque $R > 0$, la série converge normalement sur tout compact $[-A, A] \subset]-R, R[$ (c'est-à-dire lorsque $A < R$). Lorsque la suite $|a_n|^{1/n}$ admet une limite ℓ pour $n \to \infty$, la valeur de R est donnée par $1/\ell$ (avec la convention $1/0 = +\infty$ et $1/\infty = 0$).

Ce"nombre" R porte le nom de rayon de convergence de la série entière. On va voir une démonstration partielle de la proposition ci-dessus.

Preuve.— Supposons qu'il existe $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \ell$ et prenons $R = 1/\ell$. Pour x tel quel $|x| > R$ on veut prouver que la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge. On utilise $\ell|x| > 1$, ce qui implique qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que $(\ell - \epsilon)|x| > 1$. Or, si la série convergeait, on devrait avoir $\lim_{n\to\infty} |a_n||x|^n = 0$, mais, pour n à partir d'un certain rang, $|a_n||x|^n \geq [(\ell - \epsilon)|x|]^n \to +\infty$, ce qui donne une contradiction.

Pour prouver la convergence simple pour $|x| < R$, il suffit de prouver la convergence normale sur $[-A, A] \subset]-R, R[$ (en effet, il suffira de prendre $A = |x|$ pour obtenir la convergence siple au point x). Estimons la norme $||f_n||_\infty$ sur $[-A, A]$, où $f_n(x) = a_n x^n$. Il faut calculer $\sup\{|a_n||x|^n : x \in [-A, A]\} = |a_n|A^n$. En utilisant $|a_n|^{1/n} \leq (\ell + \epsilon)$ et $(\ell + \epsilon)A < 1$ (qui vient de $A < R$) on peut comparer la série $\sum_{n\geq 0} |a_n|A^n$ à la série $\sum_{n\geq 0}[(\ell + \epsilon)A]^n$, qui est géométrique et convergente. Donc, la série des fonctions f_n converge normalement. □

La formule pour calculer le rayon de convergence peut être étendue au cas où $|a_n|^{1/n}$ n'a pas de limite, mais cela demande à utiliser la notion de $\limsup$.

Définition 3.6.3 Étant donnée une suite b_n de nombres réeles on dit que ℓ_+ est la limsup de b_n, et on écrit $\ell_+ = \limsup_{n\to\infty} b_n$ si pour tout $\ell' > \ell_+$ on a $b_{\leq}\ell'$ à partir d'un certain rang ($\forall \ell' > \ell\ \exists N$ tel que $\forall n \geq N$ on a $b_n \leq \ell'$) et en plus il existe une sous-suite b_{n_k} telle que $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \ell_+$.

De manière équivalente on peut définir

$$\ell_+ := \inf\{\ell' : \exists N \text{ tel que } \forall n \geq N \text{ on a } b_n \leq \ell'\}$$

où

$$\ell_+ := \lim_{n\to\infty} c_n, \quad \text{où } c_n := \sup\{b_k : k \geq n\}.$$

On remarque en passant que si $b_n \to \ell$ alors ℓ est aussi la limsup de b_n.

Le résultat concernant le rayon de convergence peut donc être prouvé dans le cas plus général où la limite de $|a_n|^{1/n}$ pourrait ne pas exister. Considéerons

$$R = \frac{1}{\ell_+}, \quad \text{où} \quad \ell_+ = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Preuve.— (à éviter dans une première lecture)

Reprenons la preuve de tout à l'heure. Pour $|x| > R$ on a encore $\ell_+|x| > 1$ et $(\ell_+ - \epsilon)|x| > 1$. En utilisant la définition de limsup, il existe une sous-suite $|a_{n_k}|^{1/n_k}$ telle que $|a_{n_k}|^{1/n_k} \to \ell_+$, et donc $|a_{n_k}|^{1/n_k} > \ell_+ - \epsilon$ à partir d'un certain rang. Par conséquence, $|a_{n_k}||x|^{n_k} \to \infty$, ce qui interdit la convergence de la série.

Pour le cas de la convergence normale sur $[-A, A]$ avec $A < R$, la preuve est la même que dans le cas où ℓ_+ est une limite. En effet, on a juste besoin d'utiliser $(\ell_+ + \epsilon)A < 1$ et $|b_n|^{1/n} \leq \ell_+ + \epsilon$ à partir d'un certain rang. $\square$

Le résultat suivant est très important.

Proposition 3.6.4 Le rayon de convergence d'une série entière est égal au rayon de convergence de sa série des dérivées.

En particulier, par récurrence, en appliquant le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, on obtient que la fonction somme d'une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et que sa dérivée d'ordre k est la somme des dérivées d'ordre k de son terme général.

3.7 Un exemple

Exercice 3.7.1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n^x}\cdot$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.

2. Calculer $f_n'(x)$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $x > 0$ fixé. Déterminer la limite de $n^2 f_n(x)$ quand $n \to +\infty$. En déduire que la série de terme général f_n converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

4. Donner $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)|$. Montrer que la série de terme général f_n ne peut pas être normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$.

5. Montrer que la fonction $S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Corrigé

1. On note tout d'abord que $f_n(x) = xe^{-x(n+\ln n)}$. On a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, et pour $x > 0$, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

2. On calcule $f_n'(x) = e^{-x(n+\ln n)}(1 - (n + \ln n)x)$. La fonction f_n est donc croissante sur $[0, 1/(n + \ln n)]$ et décroissante sur $[1/(n + \ln n), +\infty]$. La fonction f_n admet un maximum

en $x_n = 1/(n + \ln n)$, et la valeur de ce maximum est $d_n = f_n(x_n) = \dfrac{1}{e(n + \ln n)}\cdot$ Puisque $d_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

3. Soit $x > 0$ fixé. On a $n^2 f_n(x) = n^2 x e^{-x(n+\ln n)} \to 0$ quand $n \to +\infty$ par croissance comparée. Donc la suite $(n^2 f_n(x))$ est bornée : il existe $C > 0$ tel que

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{C}{n^2}.$$

Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge, la série de terme général $f_n(x)$ converge aussi. Pour $x = 0$ on a $f_n(x) = 0$. Au total, la série de terme général $f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

4. On a calculé à la question 2 $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = d_n = \dfrac{1}{e(n + \ln n)}$. Supposons que la suite (a_n) vérifie $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| \leq a_n$. On aurait nécessairement

$$a_n \geq d_n \geq \frac{1}{2en},$$

donc la série de terme général a_n serait divergente. La série de terme général f_n ne peut pas être normalement convergente.

5. On va montrer que la série de terme général f_n est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ pour $a > 0$, ce qui donnera le résultat. Soit donc $a > 0$. Puisque $x_n = 1/(n + \ln n)$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $x_n < a$. La fonction f_n étant alors décroissante sur $[a, +\infty[$, on a

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(a) = a e^{-a(n+\ln n)} \leq a e^{-an}.$$

Or la série de terme général ae^{-an} est convergente, ce qui prouve la convergence normale de la série de terme général f_n sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

Chapitre 4

Fonctions définies par des intégrales à paramètre

4.1 Intégrales simples

On s'intéresse ici aux fonctions $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par une expression du type

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt,$$

où $[a,b]$ est un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Notre objectif est d'établir des conditions suffisantes sur la fonction deux variables $(x,t) \mapsto f(x,t)$ pour que la fonction F soit bien définie, continue, dérivable ou même encore plus régulière. D'un point de vue formel, on peut penser qu'on a remplacé la somme sur les entiers n des séries de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ par une "somme" sur tous les $t \in [a,b]$.

4.1.1 Notion de continuité uniforme

Dans les démonstrations qui vont suivre, le premier rôle est joué par la notion de continuité uniforme. On rappelle d'abord qu'une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ lorsqu'elle est continue en chaque point x de I c'est-à-dire,

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha(\epsilon,x) > 0 \text{ tel que } |y-x| \leq \alpha(\epsilon,x) \Rightarrow |\phi(y) - \phi(x)| \leq \epsilon.$$

Comme le laisse entrevoir la notation utilisée, le nombre $\alpha = \alpha(\epsilon,x)$ dépend de ϵ et de x. Lorsqu'on peut choisir un $\alpha = \alpha(\epsilon)$ qui convient pour tous les x de I, on dit que la fonction ϕ est uniformément continue sur I.

Définition 4.1.1 Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On dit que ϕ est uniformément continue sur I lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x,y \in I,\ |y-x| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |\phi(y) - \phi(x)| \leq \epsilon.$$

Bien sûr, si une fonction est uniformément continue sur I, elle est continue sur I. La réciproque est fausse : voici un exemple de fonction continue qui n'est pas uniformément continue : soit $f : x \mapsto x^2$. Supposons que f soit uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Pour $\epsilon = 1$ en particulier, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, |x - y| \leq \alpha \Longrightarrow |x^2 - y^2| \leq 1.$$

Soit alors $y \in \mathbb{R}^+$ quelconque et $x = y + \alpha$. On a bien $|x - y| \leq \alpha$, mais

$$|x^2 - y^2| = (x + y)|x - y| = \alpha(2y + \alpha),$$

et il est absurde de dire que $\alpha(2y + \alpha) \leq 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}^+$.

Ces définitions s'étendent au cas des fonctions de plusieurs variables. Par exemple si $f : I \times J \to \mathbb{R}$ est une fonction des variables $(t, x) \in I \times J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on dit que f est

— continue sur $I \times J$ lorsque

$$\forall (t, x) \in I \times J,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha(\epsilon, t, x) > 0 \text{ tel que}$$
$$|(s, y) - (t, x)| \leq \alpha(\epsilon, t, x) \Rightarrow |f(s, y) - f(t, x)| \leq \epsilon.$$

— uniformément continue sur $I \times J$ lorsque

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha(\epsilon) > 0 \text{ tel que}$$
$$\forall (t, x) \in I \times J,\ |(s, y) - (t, x)| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |f(s, y) - f(t, x)| \leq \epsilon.$$

Dans l'exemple de la fonction $f : x \to x^2$, il est essentiel que l'on se soit posé la question de la continuité uniforme sur une partie non-bornée de $\mathbb{R}$. On a en effet le résultat suivant

Proposition 4.1.2 Soit $I \times J \subset \mathbb{R}^2$, et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur tout fermé borné $[a, b] \times [c, d] \subset I \times J$.

Preuve.— On suppose par l'absurde que cela ne soit pas vrai. On a alors l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$ il y a deux paires $(t, x), (s, y)$ avec $|(t, x) - (s, y)| < \alpha$ et $|f(t, x) - f(s, y)| \geq \epsilon$. En prenant $\alpha = 1/n$, on a donc quatre suites t_n, x_n, s_n, y_n. Ces suites sont toutes bornées, on peut donc extraire des sous-suites convergeantes. Il faut les extraire dans l'ordre : d'abord une sous-suite $t_{n_k} \to t_0$, puis une sous-suite $x_{n_{k_h}} \to x_0$ (extraite à partir des indices précédemment sélectionnés pour la sous-suite t_{n_k})...de cette manière on obtient quatre sous-sous-sous-sous-suites (qu'on appellera simplement $t_{n_k}, x_{n_k}, s_{n_k}, y_{n_k}$ par simplicité) telles que $t_{n_k} \to t_0$, $x_{n_k} \to x_0$, $s_{n_k} \to s_0$, $y_{n_k} \to y_0$ et

$$|(t_{n_k}, x_{n_k}) - (s_{n_k}, y_{n_k})| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(t_{n_k}, x_{n_k}) - f(s_{n_k}, y_{n_k})| \geq \epsilon.$$

En passant à la limite dans la première inégalité on trouve $(t_0, x_0) = (s_0, y_0)$ et dans la deuxième $|f(t_0, x_0) - f(s_0, y_0)| \geq \epsilon$, ce qui est absurde. □

4.1.2 Continuité

Grâce à cette continuité uniforme automatique, on a facilement la

Proposition 4.1.3 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : (x,t) \in I \times [a,b] \to f(x,t) \in \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt,$$

est continue sur I.

Preuve.— Tout d'abord la fonction F est bien définie sur I puisque, pour chaque $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue, donc intégrable sur $[a,b]$. Soit alors $x_0 \in I$. On veut montrer que F est continue en x_0.

- On suppose tout d'abord que $I = [c,d]$ est fermé et borné. Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est continue sur $I \times [a,b]$, elle y est uniformément continue, donc il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que

$$\forall (x,t) \in I \times [a,b],\ |x - x_0| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |f(x,t) - f(x_0,t)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Ainsi, pour $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \alpha(\epsilon)$, on a

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)|dt \leq \epsilon,$$

ce qui montre que F est continue au point x_0.

- Si I est fermé mais pas borné, on prend $[c,d] = I \cap [x_0 - 1, x_0 + 1]$ et ce qui précède montre que F est continue en x_0. Si I est ouvert on prend $[c,d] = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ pour $\delta > 0$ suffisamment petit. □

Exemple 4.1.4 Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \sin(tx)dt$. Puisque $(x,t) \mapsto \sin(tx)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$, la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. D'ailleurs on peut calculer directement

$$F(x) = \left[-\frac{\cos(tx)}{x} \right]_0^1 = \frac{1 - \cos x}{x},$$

ce qui permet de retrouver que cette fonction est continue en $x = 0$.

4.1.3 Dérivation

On donne maintenant une condition suffisante pour que la fonction

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

soit dérivable sur I. Bien entendu, on espère que, en supposant que la fonction f soit dérivable par rapport à la variable x, la dérivée de F soit donnée par l'intégrale de la dérivée de f par rapport à x, autrement dit que l'on puisse échanger dérivation et intégrale.

Proposition 4.1.5 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si la fonction f admet une dérivée partielle $\partial_x f$ continue sur $I \times [a,b]$, alors la fonction F est dérivable sur I et

$$F'(x) = \int_a^b \partial_x f(x,t)dt.$$

Preuve.— Soit $x_0 \in I$. On veut montrer que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \partial_x f(x,t)dt.$$

Or

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) - (x - x_0)\int_a^b \partial_x f(x,t)dt &= \int_a^b f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\partial_x f(x,t)dt \\ &= \int_a^b g(x,t) - g(x_0,t)dt, \end{aligned}$$

où $g(x,t) = f(x,t) - (x - x_0)\partial_x f(x_0,t)$. On remarque que

$$\partial_x g(x,t) = \partial_x f(x,t) - \partial_x f(x_0,t).$$

Soit $[c,d] \subset I$ un intervalle compact contenant x_0. Comme $\partial_x f$ est continue par rapport à (x,t), $\partial_x f$ est uniformément continue par rapport à (x,t) dans $[c,d] \times [a,b]$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que

$$\forall t \in [a,b], \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |\partial_x g(x,t)| = |\partial_x f(x,t) - \partial_x f(x_0,t)| \leq \epsilon$$

D'après le théorème des accroissements finis, on a alors

$$\forall t \in [a,b], \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |g(x,t) - g(x_0,t)| \leq \epsilon|x - x_0|.$$

Finalement on obtient

$$|F(x) - F(x_0) - (x - x_0)\int_a^b \partial_x f(x,t)dt| \leq \epsilon(b-a)|x - x_0|,$$

ce qui entraine la proposition en faisant tendre $x \to x_0$. □

Exemple 4.1.6 Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \int_0^1 t\cos(tx)dt.$$

La fonction $g : (x,t) \mapsto t\cos(tx)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$, donc G est continue sur $\mathbb{R}$. On peut remarquer que

$$\partial_x(\sin(tx)) = g(t,x),$$

donc, notant $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \sin(tx)dt$, on a

$$G(x) = \int_0^1 t\cos(tx)dt = F'(x) = \frac{x\sin x + \cos x - 1}{x^2}.$$

4.2 Intégrales généralisées

On considère maintenant des fonctions définies par des intégrales généralisées, de la forme

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt,$$

même si les résultats de ce paragraphe s'appliquent en fait mutatis mutandis à toutes les sortes d'intégrales généralisées. Dans ce cas, le théorème précédent, concernant la continuité de F, ne s'applique plus (l'intervalle d'intégration n'est pas compact). Pour montrer la continuité de F en x_0, on est amené à estimer

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^{+\infty} f(x,t) - f(x_0,t)dt$$

On peut penser à découper cette intégrale en deux parties

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^{A} f(x,t) - f(x_0,t)dt + \int_A^{+\infty} f(x,t) - f(x_0,t)dt,$$

et on saura traiter la première à l'aide de la Proposition 4.1.3, en supposant que f est continue par rapport à (x,t). Pour traiter la seconde, on a besoin d'une notion supplémentaire.

4.2.1 Convergence uniforme

Définition 4.2.1 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit aussi f une fonction continue sur $I \times [0,+\infty[$ telle que, pour chaque $x \in I$, l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ converge. On dit que cette intégrale est uniformément convergente sur I lorsque,

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon > 0 \text{ tel que } A \geq A_\epsilon \Rightarrow \left|\int_A^{+\infty} f(x,t)dt\right| \leq \epsilon \text{ pour tout } x \in I.$$

En fait cette définition est à rapprocher de ce que l'on a vu pour les séries de fonctions : la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément lorsque la suite de ses restes $R_p = \sum_{n\geq p} f_n$ converge uniformément vers 0. Le lien entre ces deux notions est encore plus fort :

Proposition 4.2.2 Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ une intégrale uniformément convergente sur l'intervalle I. Si (u_n) est une suite de $[0,+\infty[$ qui tend vers $+\infty$, alors la suite (F_n) de fonctions définies sur I par

$$F_n : x \mapsto \int_0^{u_n} f(x,t)dt$$

converge uniformément sur I vers F.

Preuve.— Soit $\epsilon > 0$. Il existe $A_\epsilon > 0$ tel que

$$A \geq A_\epsilon \Rightarrow |\int_A^{+\infty} f(x,t)dt| \leq \epsilon \text{ pour tout } x \in I.$$

Puisque $u_n \to +\infty$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\epsilon \Rightarrow u_n \geq A_\epsilon$. Du coup, pour $n \geq N_\epsilon$, on a

$$\forall x \in I,\ |F(x) - F_n(x)| \leq |\int_{u_n}^{+\infty} f(x,t)dt| \leq \epsilon,$$

ce qui montre que $|F - F_n|_{I,\infty} \to 0$ quand $n \to +\infty$. □

4.2.2 Continuité, Dérivation

Si les fonctions F_n définies ci-dessus sont continues sur I, et si l'intégrale $F(x)$ est uniformément convergente sur I, le théorème de continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues montre que F est continue sur I. On a donc obtenu la

Proposition 4.2.3 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $f : I \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$$

soit uniformément convergente sur I. Alors la fonction F est continue sur I.

Preuve.— Il suffit de considérer les fonctions $F_n(x) := \int_0^n f(x,t)dt$ et de remarquer qu'elles sont continues et qu'elles convergent uniformément vers F. □

On a aussi un résultat de ce genre pour la dérivation :

Proposition 4.2.4 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $f : I \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si

i) f admet une dérivée partielle $\partial_x f(x,t)$ continue sur $I \times [0,+\infty[$,

ii) Pour tout $x \in I$, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est convergente,

iii) L'intégrale

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \partial_x f(x,t)dt$$

est uniformément convergente sur I,

alors F est dérivable sur I, et $F'(x) = \phi(x)$, c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\int_0^{+\infty} f(x,t)dt\right) = \int_0^{+\infty} \partial_x f(x,t)dt$$

Preuve.— Il suffit à bouveau de considérer les fonctions $F_n(x) := \int_0^n f(x,t)dt$. Grâce aux hypothèeses, elles sont C^1 et leur dérivée est donnée par $F_n'(x) := \int_0^n \partial_x f(x,t)dt$. Or, on a bien $F_n(x) \to F(x)$ (convergence simple, grace à *ii)*) et $F_n'(x) \to \phi(x) := \int_0^{+\infty} \partial_x f(x,t)dt$ uniformément (hypothèses *iii)*). Donc F est C^1 est $F' = \phi$. □

Il faut faire le parallèle entre ce résultat et la proposition 3.5.3 concernant la dérivabilité d'un série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$: formellement, le point (i) correspond à la dérivabilité des fonctions f_n, le point (ii) à la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$, et le point (iii) à la convergence uniforme de la série des dérivées $\sum_{n\geq 0} f_n'$.

4.2.3 Convergence normale

Il est la plupart du temps difficile d'établir directement la convergence uniforme d'une intégrale généralisée à paramètre. Comme pour les séries de fonctions, on va introduire une notion de convergence plus facile à vérifier, et qui entraine la convergence uniforme.

Définition 4.2.5 Soit $f : I \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ converge normalement sur I lorsqu'il existe une fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ telle que

i) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge.

ii) Pour tout $(x,t) \in I \times [0,+\infty[$, $|f(x,t)| \leq g(t)$.

Là encore, le parallèle avec la notion de convergence normale des séries de fonctions est flagrant : la fonction g joue ici le rôle que jouait la suite (a_n) dans la définition 3.4.1. On se réfère souvent aux conditions (i) et (ii) en disant que la fonction $f(x,t)$ est dominée par une fonction intégrable g indépendante de x.

En passant par un critère de Cauchy uniforme pour les intégrales généralisées, tout à fait similaire à celui vu pour les séries de fonctions, on peut démontrer que

Proposition 4.2.6 Soit $f : I \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.

On obtient alors des critères de continuité et de dérivabilité pour les intégrales généralisées à paramètres qui sont ceux qu'il faut retenir

Proposition 4.2.7 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $f : I \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. S'il existe $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ telle que

i) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge.

ii) Pour tout $(x, t) \in I \times [0, +\infty[$, $|f(x, t)| \leq g(t)$.

alors la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t)dt$$

est continue sur I.

Proposition 4.2.8 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $f : I \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si

i) f admet une dérivée partielle $\partial_x f(x, t)$ continue sur $I \times [0, +\infty[$,

ii) Pour tout $x \in I$, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, t)dt$ est convergente,

iii) Il existe $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ telle que

  (a) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge.

  (b) Pour tout $(x, t) \in I \times [0, +\infty[$, $|\partial_x f(x, t)| \leq g(t)$.

alors F est dérivable sur I et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \partial_x f(x, t)dt$$

4.3 Un exemple

Soit $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, t) = \frac{\cos(tx)}{t^2 + 1}\cdot$$

1. Montrer que la fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, t)dt$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(u)}{u^2 + x^2}du.$$

3. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(*indication :* poser $\phi(x, u) = \dfrac{x\cos(u)}{u^2 + x^2}$, et majorer $|\phi(x, u)|$, $|\partial_x\phi(x, u)|$, et $\left|\partial_x^2\phi(x, u)\right|$ sur des intervalles $[a, b] \subset]0, +\infty[$)

4. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $F''(x) = F(x)$.

5. En déduire une expression simple de $F(x)$, pour tout réel x.

Corrigé

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos(tx)}{t^2+1} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt < +\infty,$$

donc l'intégrale généralisée $F(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On voit aussi que F est une fonction bornée. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, on a la domination

$$|f(x,t)| \leq g(t) := \frac{1}{1+t^2},$$

avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt < +\infty$. Donc la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On change de variable en posant $u = tx$. On remarque au passage que F est paire, ce qui justifie de restreindre l'étude à $x > 0$.

3. Posons $\phi(x,u) = \dfrac{x\cos(u)}{u^2+x^2}$. Soient $0 < a < b$ quelconques. Pour tout $(x,u) \in [a,b]\times]0, +\infty[$, on majore

$$|\phi(x,u)| \leq \frac{b}{a^2+u^2} := g_0(u),$$

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right| = \left| \frac{\cos(u)}{u^2+x^2} - 2\,\frac{x^2\cos(u)}{(u^2+x^2)^2} \right| = \left| -\frac{\cos(u)\left(-u^2+x^2\right)}{(u^2+x^2)^2} \right| \leq \frac{b^2+u^2}{(a^2+u^2)^2} := g_1(u),$$

et

$$\left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right| = \left| -6\,\frac{\cos(u)\,x}{(u^2+x^2)^2} + 8\,\frac{x^3\cos(u)}{(u^2+x^2)^3} \right| = \left| 2\,\frac{\cos(u)\,x\left(-3\,u^2+x^2\right)}{(u^2+x^2)^3} \right| \leq \frac{2b(b^2+3u^2)}{(a^2+u^2)^3} := g_2(u).$$

Comme g_0, g_1 et g_2 sont intégrables sur $[0, +\infty[$, on conclut successivement que F est continue, dérivable, $\mathcal{C}^1$, puis deux fois dérivable et enfin $\mathcal{C}^2$ sur tout intervalle $]a,b[\subset]0, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$. Par parité, elle est aussi $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty, 0[$.

4. On intègre par parties deux fois : pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(u)}{u^2+x^2} du &= \left[\frac{x\sin u}{x^2+u^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2xu}{(x^2+u^2)^2} du \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2xu}{(x^2+u^2)^2} du \\
&= \left[-\frac{2xu}{(x^2+u^2)^2}\cos u\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2x(x^2-3u^2)}{(x^2+u^2)^3}\cos u\, du \\
&= F''(x).
\end{aligned}$$

5. Puisque F satisfait sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $y'' - y = 0$, on a $F(x) = Ae^x + Be^{-x}$ pour tout $x > 0$. On sait que $F(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, donc nécessairement $A = 0$. On sait

aussi que F est continue en 0 et paire, et que

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

On a donc, finalement, $F(x) = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-|x|}$.