Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024
UE de calcul différentiel, courbes et surfaces

Contrôle final: durée 2 heures.
VEUILLEZ RÉDIGER CHAQUE EXERCICE DE CE DEVOIR SUR UNE COPIE DIFFÉRENTE
Les documents de cours et de TD ne sont pas autorisés.
Attention : le barème dépasse largement 20 ; il n'est donc absolument pas nécessaire de traiter tous les exercices et il est conseillé de se concentrer sur trois d'entre eux.

Exercice 1 (8 points)**.** Vrai ou faux ? Justifier votre réponse par une preuve ou un contre-exemple explicite.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une fonction dérivable en tout point et a, b deux réels distincts. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$.

b) Dans $\mathbb{R}^3$ (muni de la norme euclidienne), soit $\overline{B_1}$ la boule unité fermée et B_2 la boule ouverte de rayon 2, centrées en l'origine. Soit $f : B_2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors, la restriction de f à B_1 est lipschitzienne.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction surjective, de classe C^1 dont la dérivée f' ne s'annule pas. Alors, f est un difféomorphisme de classe C^1.

d) Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane, de classe C^1, régulière et $t_0 \in]a, b[$, on note (x_0, y_0) les coordonnées cartésiennes de $\gamma(t_0)$ et (x_0', y_0') celles de $\gamma'(t_0)$. Alors, la droite tangente à γ au point (x_0, y_0) a pour équation cartésienne $x_0'(y - y_0) = y_0'(x - x_0)$.

Solution :

a) FAUX. Prendre par exemple $f(t) = e^{it}$ pour $t \in \mathbb{R}$, $a = 0$ et $b = 2\pi$.

b) VRAI. $|\nabla f|$ est continue (comme composée de deux fonctions continues). Ainsi, sa restriction au compact $\overline{B_1}$ atteint son maximum M. B_1 étant convexe, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis et conclure que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

pour tous x, y appartenant à B_1.

c) VRAI. f' ne s'annulant pas, le théorème de Rolle implique que f est injective. On sait aussi que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}$ et que pour $a \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}$, $Df(a)(h) = f'(a)h$. Puisque $f'(a) \neq 0$, $Df(a)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$. Par le théorème d'inversion globale, f est un difféomorphisme de classe C^1.

d) VRAI. Remarquons que le vecteur $n = (-y_0', x_0')$ est orthogonal au vecteur tangent $\gamma'(t_0) = (x_0', y_0')$. La droite tangente a donc pour équation cartésienne

$$n \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

i.e. $x_0'(y - y_0) = y_0'(x - x_0)$.

Exercice 2 (9 points)**.** Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ le cône défini par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z^2 = x^2 + y^2\}.$$

On se donne un point $M \in S \setminus \{0\}$ et on désigne par P_M le plan tangent à S (en tant qu'espace affine) qui passe par M.

a) Écrire l'équation de P_M en un point $M = (x_0, y_0, z_0) \in S \setminus \{0\}$. Montrer aussi que le plan tangent au cône S est le même en M et en tout point du type $M' = \lambda M$ avec $\lambda \neq 0$.

b) On se donne $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitraire et on désigne par $G \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $y = \alpha x$. Montrer que $G \cap S$ consiste en deux droites vectorielles. On donnera un vecteur directeur pour chacune d'elle, puis une paramétrisation.

c) Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée définie par $\gamma(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$, où $t \in [a, b]$. Prouver que le support de la courbe est contenu dans S et calculer la longueur de cette courbe en termes de a et b.

d) Pour la même courbe, calculer $\gamma'(0), \gamma''(0)$ et sa courbure au point $\gamma(0)$ (on suppose $0 \in]a, b[$). Prouver que ni cette courbe ni toute reparamétrisation (par un difféomorphisme de classe C^2) de cette courbe ne satisfont l'équation différentielle d'ordre deux des géodésiques de S.

Solution :

a) Le vecteur normal à une surface S de la forme $\{f = 0\}$ en un point M est donnée par la direction de $\nabla f(M)$ (à condition que $\nabla f(M) \neq 0$). On peut prendre $f(x, y, z) = x^2+y^2-z^2$. Si $M = (x_0, y_0, z_0)$ on a $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$. Ce gradient ne s'annule pas si $M \in S \setminus \{0\}$. L'espace affine tangent à S en M est donc l'ensemble des points $P = (x, y, z)$ tels que $P - M$ est orthogonal à $\nabla f(M)$, donc

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x_0x + y_0y - z_0z = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 0,$$

où la dernière égalité vient de $M \in S$.
Si on remplace M par λM la condition devient donc $\lambda x_0 x + \lambda y_0 y - \lambda z_0 z = 0$, qui est la même après division par $\lambda \neq 0$.
Attention : pour ce calcul il est essentiel de remarquer que le terme constant dans l'équation affine du plan s'annule, sinon la constante serait proportionnelle à λ^2 et pas à λ, donc diviser par λ ne donnerait pas la même équation.

b) Les points de $G \subset \mathbb{R}^3$ sont caractérisés par

$$\begin{cases} y = \alpha x & \text{(équation de } G) \\ z^2 = x^2 + y^2 & \text{(équation de } S). \end{cases}$$

Cela donne $z^2 = (1+\alpha^2)x^2$, donc $z = \pm x\sqrt{1 + \alpha^2}$. On a donc les points du type $(x, \alpha x, x\sqrt{1 + \alpha^2})$, une première droite vectorielle, et ceux du type $(x, \alpha x, -x\sqrt{1 + \alpha^2})$, une deuxième. Ces expressions avec $x \in \mathbb{R}$ en sont des paramétrisations. Les vecteurs $(1, \alpha, \sqrt{1 + \alpha^2})$ et $(1, \alpha, -\sqrt{1 + \alpha^2})$ sont respectivement un vecteur directeur de l'une et de l'autre.

c) Pour vérifier que le support de la courbe est contenu dans S il faut vérifier si l'équation définissant S est satisfaite par les points de la courbe. Comme on a $(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2 = (e^t)^2$ on trouve que le support de la courbe est bien contenu dans S.
Ensuite, on calcule $\gamma'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), e^t)$ et

$$\begin{aligned} ||\gamma'(t)|| &= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t \sin t) + e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t + 2\cos t \sin t) + e^{2t}} \\ &= e^t\sqrt{2\cos^2 t + 2\sin^2 t + 1} = e^t\sqrt{3}. \end{aligned}$$

La longueur de la courbe est donnée par

$$\int_a^b ||\gamma'(t)||dt = \sqrt{3}\int_a^b e^t dt = \sqrt{3}(e^b - e^a).$$

d) On a déjà calculé la formule pour $\gamma'(t)$. On calcule $\gamma''(t) = (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t, e^t)$. On a donc

$$\gamma'(0) = (1, 1, 1), \quad \gamma''(0) = (0, 2, 1).$$

Pour une courbe non parametrée par longueur la formule à utiliser pour la courbure est

$$\kappa(0) = \frac{||\gamma'(0) \wedge \gamma''(0)||}{||\gamma'(0)||^3}.$$

On calcule
$$\gamma'(0) \wedge \gamma''(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
La norme de ce vecteur vaut $\sqrt{6}$. Par conséquent, la courbure $\kappa(0)$ vaut $\sqrt{6}/(\sqrt{3})^3 = \sqrt{2}/3$. L'équation des géodésiques d'une surface de la forme $\{f = 0\}$ est
$$\gamma''(t) = -\frac{D^2 f(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t))}{||\nabla f(\gamma(t))||^2} \nabla f(\gamma(t)).$$
En particulier, il faut que pour tout t, le vecteur $\gamma''(t)$ soit colinéaire avec $\nabla f(\gamma(t))$. Dans notre cas, cela ne se produit pas en $t = 0$ parce que les vecteurs $(0, 2, 1)$ et $(2, 2, -2)$ ne sont pas colinéaires. Donc γ n'est pas solution de cette équation. Ce n'est pas surprenant, parce que les solutions de cette équation ont une vitesse $||\gamma'||$ constante, ce qui n'est pas le cas ici.
Considérons maintenant une reparamétrisation $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$. Dans ce cas on a
$$\tilde{\gamma}'' = (\gamma' \circ \phi)\phi'' + (\gamma'' \circ \phi)|\phi'|^2.$$
Donc, la dérivée seconde de $\tilde{\gamma}$ est une combinaison linéaire de γ'' et γ'. Pour être une solution de l'équation des géodésiques il serait donc nécessaire que le vecteur $\nabla f(\gamma(\phi(t))$ soit une combinaison linéaire de $\gamma'(\phi(t))$ et $\gamma''(\phi(t))$. Prenons t tel que $\phi(t) = 0$. On trouverait donc que le vecteur $(2, 2, -2)$ serait une combinaison linéaire de $(0, 2, 1)$ et $(1, 1, 1)$, ce qui n'est pas le cas puisque ces trois vecteurs font une famille libre, comme on peut le voir en calculant le déterminant de leur matrice :
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 8 \neq 0.$$

Exercice 3 (6 points)**.** On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire habituel et de la norme euclidienne. On se donne une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$,
$$Df(x)(h) \cdot h \geq \alpha \|h\|^2.$$

a) Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^n$.

b) On se donne dans cette question une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $a, b \in \mathbb{R}^n$ arbitraires.

  b1) Montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = g\big((1-t)a + tb\big)$, est de classe C^1 et calculer sa dérivée.

  b2) Montrer qu'il existe un point c sur le segment $[a, b]$ tel que
$$g(b) - g(a) = (b - a) \cdot \nabla g(c).$$

c) Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ arbitraires. Montrer l'inégalité
$$\big(f(b) - f(a)\big) \cdot (b - a) \geq \alpha \|b - a\|^2.$$
(Indication : on pourra considérer la fonction $g(x) = \big(f(x) - a\big) \cdot (b - a)$.)

d) Montrer que l'ensemble $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.

e) Montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Solution :

a) La fonction f étant C^1, par le théorème d'inversion locale il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme. Comme on est en dimension finie, la continuité de $Df(x)$ (qui est linéaire) est automatique. Comme les espaces d'arrivée et de départ pour $Df(x)$ sont de même dimension, si $Df(x)$ est injective alors elle est bijective. Il suffit donc de montrer que $Df(x)$ est injective pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Cela est évident car si $Df(x)(h) = 0$ alors $Df(x)(h) \cdot h = 0$ donc $0 \geq \alpha \|h\|^2$ d'où $h = 0$.

b) b1) Comme l'application $t \mapsto (1-t)a + tb$ est polynômiale donc C^1, nous avons que h est C^1 comme composition de fonctions C^1. La dérivée se calcule à l'aide de la règle de la chaîne :

$$h'(t) = \frac{d}{dt}\big[g\big((1-t)a+tb\big)\big] = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\big[\big((1-t)a+tb\big)_i\big]\frac{\partial g}{\partial x_i}\big((1-t)a+tb\big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\frac{\partial g}{\partial x_i}\big((1-t)a+tb\big) = (b-a)\cdot \nabla g\big((1-t)a+tb\big).$$

b2) On commence par remarquer que $g(b)-g(a) = h(1)-h(0)$, puis on applique le théorème des accroissements finis dans $\mathbb{R}$: il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que

$$h(1)-h(0) = h'(t_0) = (b-a)\cdot\nabla g\big((1-t_0)a + t_0 b\big).$$

Donc $c = (1-t_0)a + t_0 b$ convient.

c) On commence par calculer les dérivées partielles de g :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\big[\big(f(x)-a\big)\cdot(b-a)\big] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot(b-a).$$

Puis

$$\begin{aligned}\big(f(b)-f(a)\big)\cdot(b-a) &= g(b)-g(a)\\ &= (b-a)\cdot\nabla g(c)\\ &= \sum_i (b_i-a_i)\frac{\partial g}{\partial x_i}(c)\\ &= \sum_i (b_i-a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\cdot(b-a)\\ &= \Big[\sum_i (b_i-a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\Big]\cdot(b-a)\\ &= \big[Df(c)(b-a)\big]\cdot(b-a)\\ &\geq \alpha\|b-a\|^2.\end{aligned}$$

d) On montre que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé en utilisant la caractérisation avec les suites. Soit $y_n \in f(\mathbb{R}^n)$, $y_n \to y$. Alors il existe $x_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_n) = y_n$. On utilise la question précédente pour écrire

$$\alpha\|x_n - x_m\|^2 \leq \big(f(x_n)-f(x_m)\big)\cdot(x_n-x_m) = (y_n-y_m)\cdot(x_n-x_m) \leq \|y_n-y_m\|\,\|x_n-x_m\|$$

d'où $\|x_n-x_m\| \leq \|y_n-y_m\|/\alpha$. Or la suite (y_n) est convergente, donc de Cauchy : $\lim_{m,n\to\infty} y_n - y_m = 0$. Cela implique $\lim_{m,n\to\infty} x_n - x_m = 0$, donc (x_n) est de Cauchy et par conséquent convergente. Soit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Par continuité de f nous avons que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

d'où $y \in f(\mathbb{R}^n)$. On conclut que $f(\mathbb{R}^n)$ est bien fermé.

e) On voit tout de suite que la question c) implique f injective. Comme f est injective et difféomorphisme local en tout point (cf. question a)), par le théorème d'inversion globale nous avons que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f(\mathbb{R}^n)$. Comme $f(\mathbb{R}^n)$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$ et que $\mathbb{R}^n$ est connexe, il s'ensuit que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Donc f est bien un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4 (7 points)**.** Soit $E \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble défini par $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ g((x,y,z) \leq 1\}$, où la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est définie par $g(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2$; soit $Q = (x_0,y_0,z_0)$ un point de $(\mathbb{R}_+)^3 \setminus E$ (c'est-à-dire que l'on a $x_0, y_0, z_0 > 0$ et $g(x_0,y_0,z_0) > 1$), et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$.

a) Prouver que la fonction f admet un minimum sur l'ensemble E et que tout point $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ réalisant le minimum se trouve sur la frontière ∂E.
b) Prouver que tout point $\bar{P}$ réalisant le minimum n'a pas de coordonnées strictement négatives.
c) Prouver que l'on peut appliquer le théorème sur les multiplicateurs de Lagrange pour trouver $\bar{P}$ et écrire le système correspondant sous la forme

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g, \\ g = 1. \end{cases}$$

Prouver que la condition sur les signes des coordonnées de $\bar{P}$ implique $\lambda < 1/3$ et qu'avec cette condition supplémentaire le système n'admet qu'une seule solution. En déduire l'unicité du minimiseur (pouvait-on l'obtenir autrement ?).
d) Trouver $\bar{P}$ dans le cas $Q = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{4}{3})$.

Solution :

a) La fonction g est continue, donc $E = g^{-1}(]-\infty, 1])$ est un fermé. De plus, si $(x, y, z) \in E$, alors

$$\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + 2y^2 + 3z^2 = g(x, y, z) = 1.$$

Donc E est borné. C'est donc un compact. Par ailleurs, f est continue, elle admet donc un minimum sur E.
Supposons que ce minimum soit atteint en un point $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ qui soit à l'intérieur de E. Alors comme f est de classe C^1, la condition du premier ordre pour la minimisation sur un ouvert donne $\nabla f(\bar{P}) = 0$. Or pour tout $P \in \mathbb{R}^3$, $\nabla f(P) = 2(P - Q)$, et ne s'annule qu'en $P = Q$. On déduit donc que $\bar{P} = Q$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé que $Q \notin E$. On aboutit donc à une contradiction, et nécessairement le minimum de f sur E est atteint sur ∂E.

b) Soit $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un minimiseur de f sur E. Supposons que l'une des coordonnées de $\bar{P}$ soit strictement négative, par exemple, $\bar{x}$ (les autres coordonnées se traitent de la même façon). Posons $\tilde{P} := (-\bar{x}, y, z)$. Par parité coordonnée par coordonnée de g, on a $g(\tilde{P}) = g(\bar{P})$. Or $\bar{P} \in E$, donc $g(\bar{P}) \leq 1$, donc $g(\tilde{P}) \leq 1$, donc $\tilde{P} \in E$. Par ailleurs,

$$f(\bar{P}) - f(\tilde{P}) = (\bar{x} - x_0)^2 - (-\bar{x} - x_0)^2 = -4\bar{x}x_0.$$

Comme $\bar{x} < 0$ et $x_0 > 0$, cette quantité est strictement positive, et $f(\bar{P}) > f(\tilde{P})$, ce qui contredit la minimalité de $\bar{P}$. On aboutit à une contradiction, et on conclut que $\bar{x} \geq 0$, et il en est de même pour $\bar{y}$ et $\bar{z}$.

c) D'abord, comme on sait par a) que le $\bar{P} \in \partial E$, on déduit que $\bar{P}$ est un minimiseur de f sur ∂E. Par ailleurs, on sait que sur ∂E, $g = 1$. En effet, $g^{-1}(]-\infty, 1[)$ est un ouvert contenu dans $g^{-1}(]-\infty, 1]) = E$. Il est donc contenu dans son intérieur, et donc

$$\partial E = E \backslash \mathring{E} \subset E \backslash g^{-1}(]-\infty, 1]) = g^{-1}(]-\infty, 1]) \backslash g^{-1}(]-\infty, 1[) = g^{-1}(\{1\}).$$

On déduit que E est un minimiseur de f sur l'ensemble où $g = 1$.
On cherche donc le système donné par le théorème des multiplicateurs de Lagrange pour le problème consistant à minimiser f sous la contrainte $g = 1$. Montrons que cette contraintes est qualifiée. La fonction g est C^1, et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix}.$$

Ce gradient est non nul, sauf si $x = y = z = 0$. Dans ce cas, $g(x, y, z) = 0$. En particulier, la contrainte est qualifiée sur l'ensemble où $g = 1$.

Comme f est de classe C^1, le théorème des multiplicateurs de Lagrange s'applique, et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{P}) = \lambda \nabla g(\bar{P}), \\ \quad g(\bar{P}) = 1. \end{cases}$$

Ce système se réécrit

$$\begin{cases} 2(\bar{x} - x_0) = 2\lambda \bar{x}, \\ 2(\bar{y} - y_0) = 4\lambda \bar{y}, \\ 2(\bar{z} - z_0) = 6\lambda \bar{z}, \\ \bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 + 3\bar{z}^2 = 1, \end{cases} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{cases} (1-\lambda)\bar{x} = x_0, \\ (1-2\lambda)\bar{y} = y_0, \\ (1-3\lambda)\bar{z} = z_0, \\ \bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 + 3\bar{z}^2 = 1. \end{cases}$$

Comme on sait que z_0 est strictement positif et que $\bar{z}$ est positif, l'équation sur z donne $(1-3\lambda) > 0$, et donc $\lambda < 1/3$.
On en déduit que $(1-\lambda)$, $(1-2\lambda)$ et $(1-3\lambda)$ sont tous non-nuls, et donc que

$$\bar{x} = \frac{x_0}{1-\lambda}, \qquad \bar{y} = \frac{y_0}{1-2\lambda}, \qquad \bar{z} = \frac{z_0}{1-3\lambda}. \tag{1}$$

En injectant ces identités dans la troisième équation, on trouve

$$\frac{x_0^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{2y_0^2}{(1-2\lambda)^2} + \frac{3z_0^2}{(1-3\lambda)^2} = 1. \tag{2}$$

Or la fonction

$$h : a \in]-\infty, 1/3[\mapsto \frac{x_0^2}{(1-a)^2} + \frac{2y_0^2}{(1-2a)^2} + \frac{3z_0^2}{(1-3a)^2}$$

est une fonction continue qui tend vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $1/3$. En conséquence, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $a \in]-\infty, 1/3[$ tel que $h(a) = 1$. Par ailleurs, h est strictement croissante, donc ce a est unique. Comme λ doit satisfaire l'équation $h(\lambda) = 1$, λ coïncide avec ce a. Cette observation associé à (1) montre que notre système admet une unique solution, et donc que f admet un unique minimiseur sur E.
En fait, on aurait pu directement déduire l'unicité de l'optimiseur du fait que l'on minimise une fonction f strictement convexe sur un ensemble E convexe.

d) Écrivons (2) en remplaçant x_0, y_0, z_0 par les données de l'énoncé. On obtient

$$\frac{4}{3(1-\lambda)^2} + \frac{9}{3(1-2\lambda)^2} + \frac{16}{3(1-3\lambda)^2} = 1.$$

On remarque que $\lambda = -1$ est solution. Par c), c'est donc l'unique solution. En appliquant (1), on trouve donc

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad \bar{z} = \frac{1}{3}.$$