**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2022-2023
UE de calcul différentiel, courbes et surfaces

---

**Contrôle final, 2e session: durée 1h30.**
**Aucun document n'est autorisé.**

---

**Exercice 1.** (9 points).

a) Énoncer le théorème d'inversion locale dans un espace de Banach.

Soit $E$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$ et à valeur dans $\mathbb{R}$, muni de la norme du sup. Soit $\mathcal{F}$ la fonction de $E$ dans $E$ définie en associant à chaque fonction $f \in E$ la fonction $\mathcal{F}[f]$ qui à $x \in [0,1]$ associe :

$$\mathcal{F}[f](x) := f(x) + (f(x) + x)^3.$$

b) Si elle existe, quel est l'ensemble de définition et l'espace d'arrivée de la différentielle de $\mathcal{F}$ en $f = 0$ ?

c) Montrer que $\mathcal{F}$ est différentiable en $f = 0$, et calculer $L := D\mathcal{F}[0]$ sa différentielle en $f = 0$.

d) En utilisant la question a), montrer que $\mathcal{F}$ est localement un difféomorphisme au voisinage de $f = 0$.

e) Montrer que $\mathcal{F}$ est un difféomorphisme global de $E$ dans $E$.

**Solution :**

a) Soit $E$ un espace de Banach, $U \subset E$ un ouvert, $f : U \to E$ une fonction $C^1$, $a \in U$ unpoint où $Df[a]$ est un homémorphisme de $E$ dans $E$. Alors il y a un voisinave $V$ de $a$ et un voisinage $W$ de $f(a)$ tels que $f$ est un difféomorphisme de $V$ dans $W$.

b) La différentielle de $\mathcal{F}$ en $f = 0$ est une fonction linéaire de $E$ dans$E$.

c) On calcule $\mathcal{F}[0 + h]$ : on a $\mathcal{F}[0 + h](x) = h(x)(1 + 3x^2) + 3xh^2(x) + h^3(x)$. Soit $L[h] = hg_0$, où $g_0(x) = 1 + 3x^2$. L'application $L$ est linéaire en $h$ et continue pourla norme du sup, parce que $\sup|hg_0| \leq \sup|g_0|\sup|h| = 4||h||$. La norme du reste, à savoir la fonction $x \mapsto 3xh^2(x) + h^3(x)$, s'estime par $||h||^2 + ||h||^3 = o(||h||)$. La différentielle de $\mathcal{F}$ en $f = 0$ est donc l'application linéaire $L$, qui est la multiplication fois $g_0$.

d) L'application $\mathcal{F}$ est en fait différentiable en tout point $f$, et la différenteille est donnée par la multiplication fois $g_f := 1 + 3f^2$. On peut aussi dire que $\mathcal{F}$ est $C^1$, parce que

$$||D\mathcal{F}[f_1](h) - D\mathcal{F}[f_2](h)|| = ||h(3f_1^2 - 3f_2^2)|| \leq ||h||\,||f_1^2 - 3f_2^2||,$$

ce qui montre que l'on a

$$|||D\mathcal{F}[f_1] - D\mathcal{F}[f_2]||| \leq 3||f_1 + f_2||\,||f_1 - f_2||,$$

qui tend vers 0 si $||f_1 - f_2|| \to 0$. De plus, $D\mathcal{F}[0]$ est inversible,car soninverse est la division par $g_0$, et on a $||h/g_0|| \leq ||h|| \sup(1 + 3x^2)^{-1} = ||h||$, qui est donc une application linéaire et continue de $E$ dans $E$. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale en 0

e) Il faut montrer que $\mathcal{F}$ est un difféomorphisme local autour de chaque point (même preuve qu'en 0, la réciproque de $D\mathcal{F}[0]$ sera la division par $g_f$), et que c'est une fonction injective et surjective. Pour cela,étudions d'abord,pour $x$ fixé, la fonction $t \mapsto j_x(t) := t + (t + x)^3$. C'est une fonction inversible de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour l'injectivité, si $\mathcal{F}[f_1] = \mathcal{F}[f_2]$, on déduit que pour tout $x$ on a $j_x(f_1(x)) = j_x(f_2(x))$, donc $f_1(x) = f_2(x)$ et donc $f_1 = f_2$. Pourla surjectivité, on chercheà résoudre $\mathcal{F}[f] = g$, donc $j_x(f(x)) = g(x)$. Pour chaque $x$ cela a une solution unique, donc il existe bien une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) + (f(x) + x)^3 = g(x)$. Il reste à montrer $f \in E$, donc $f$ continue. Pour ce faire, soit $x_n \to x$ une suite. Soit $\ell := \liminf_n f(x_n)$. Enutilisant la continuité de $g$ (car $g \in E$) on trouve $\ell + (\ell + x)^3 = g(x)$, donc $j_x(\ell) = g(x)$, donc $\ell = f(x)$. Le même argument peut être appliqué à la limsup. On trouver $\liminf_n f(x_n) = \limsup_n f(x_n) = f(x)$, donc $f$ est continue.

**Exercice 2.** (8 points) Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, la courbe définie par

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3).$$

a) Prouver qu'il s'agit d'une courbe $C^\infty$ régulière et calculer sa courbure en tout point.
b) S'agit-il d'une courbe plane (dont l'image est contenue dans un plan) ?
c) Exprimer sa longueur $\text{long}(\gamma)$ à l'aide d'une intégrale et prouver $\sqrt{3} \leq \text{long}(\gamma) \leq 2$.

**Solution :**

a) Les composantes de $\gamma$ sont polynomiales, donc $\gamma \in C^\infty$. On a $\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2) \neq (0,0,0)$,donc $\gamma$ est régulière. Pourla courbure,onutilise la formule

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \vee \gamma''(t)|}{||\gamma'(t)||^3} = \frac{\sqrt{2 + 6t + 9t^2}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}.$$

b) On calcule la matrice $t(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))$ : on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 2 & 0 \\ 3t^2 & 6t & 6 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut 12. Cela prouve en même temps que les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires et donc que la courbe est birégulière, et que la torsion est non-nulle. La courbe n'est donc pas contenue dans un plan.

c) On a $\text{long}(\gamma) = \int_0^1 ||\gamma'(t)||dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}dt$. On peut miniorer la longueur par la distance entre $\gamma(0) = (0,0,0)$ et $\gamma(1) = (1,1,1)$, qui vaut $\sqrt{3}$, et la majorer en majorant l'intégrale : $\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}dt \leq \int_0^1 \sqrt{1 + 6^2 + 9t^4}dt = \int_0^1 (1 + 3t^2)dt = 2$.

**Exercice 3.** (9 points). Considérer l'ensemble $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x^2 + y^2)^2 = x^2 + xy + y^2\} \setminus \{(0,0)\}$.

a) Prouver que $A$ est un borné de $\mathbb{R}^2$.
b) Prouver que $A$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
c) Prouver que $A$ peut localement être paramètré comme un graphe d'une fonction $C^1$ de $y$ par rapport à $x$ ou $x$ par rapport à $y$.
d) Montrer que l'on a $\max\{x \,:\, (x,y) \in A\} > 1$. (On pourra utiliser la question c) au point $(1,0)$.)

**Solution :**

a) On utilise $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ et on pose $R := \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $(x,y) \in A$ on a $R^4 = R^2 + xy \leq \frac{3}{2}R^2$. Comme $R > 0$ (car $(0,0) \notin A$), on trouve $R^2 \leq \frac{3}{2}$, donc $A$ est borné.

b) Ce n'est pas évident que $A$ soit fermé. Posons $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x^2 + y^2)^2 = x^2 + xy + y^2\}$. Cet ensemble est bien un fermé parce qu'image reciproque d'un fermé par une fonction continue, mais $A = B \setminus \{(0,0)\}$. Or, si $(x,y) \in A$ on a aussi $R^4 = R^2 + xy \geq \frac{1}{2}R^2$ et donc $R^2 \geq \frac{1}{2}$. On peut donc aussi écrire $A = B \setminus B(0,r)$, avec $r = \sqrt{1/2}$. On a donc écrit $A$ comme un fermé privé d'un ouvert, donc un fermé. En tant que fermé borné en dimension fini, $A$ est compact.

c) On veut appliquer le théorème des fonctions implicites, et on doit trouver les points où les dérivées partielles de la fonction $g$ définie par $g(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 - xy - y^2$ s'annulent. On a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4R^2x - 2x - y, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4R^2y - 2y - x.$$

On cherche les solutions du système

$$\begin{cases} 4R^2x - 2x - y = 0, \\ 4R^2y - 2y - x = 0, \\ R^4 = R^2 + xy. \end{cases}$$

Si on multiplie la première équation fois $y$, la deuxième fois $x$, et on soustrait, on trouve $x^2 = y^2$. On a donc soit $x = y$, soit $x = -y$. On peut exclure $x = 0$ car cela entrainerait $y = 0$ et on trouverait $(0,0) \notin A$. Dans le cas $x = y$ on trouve donc $R^2 = \frac{3}{4}$, mais aussi $R^4 = \frac{3}{2}R^2$, ce qui est une contradiction. Dans le cas $x = -y$ on trouve $R^2 = \frac{1}{4}$ mais aussi $R^4 = \frac{1}{2}R^2$, ce qui est aussi une contradiction. Il n'y a donc pas de solutions au système, et cela signifie qu'en tout point de $A$ au moins une dérivée partielle de $g$ ne s'annule pas. On peut donc écrire ($g$ étant $C^1$) localement une variable comme fonction de l'autre.

d) On considère le point $(1,0)$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = 2, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = -1.$$

Les deux dérivées partielles ne s'annulant pas, on peut écrire $y = \phi(x)$ et aussi $x = \phi(y)$ au voisinage de $(1,0)$. Cela signifie en particulier que pour tout $x$ proche de 1 on trouve un $y$ proche de 0 tel que $(x,y) \in A$. En prenant $x > 1$ on trouve $\max\{x : (x,y) \in A\} > 1$. Autre possibilité : utiliser $x = \psi(y)$ et prouver $\psi'(0) \neq 0$. Autre possibilité encore : écrire le système des mulitplicateurs de Lagrange et voir qu'on ne trouve pas de $\lambda$ pour que $(\lambda, 1, 0)$ soit solution.

**Exercice 4.** (8 points) On considère le problème d'optimisation suivant dans $\mathbb{R}^n$ :

$$\min\left\{\sin\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) + \frac{A}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 \ : \ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\right\},$$

où $A > 0$ est un paramètre.

a) Prouver que le minimum existe pour toute valeur de $A$ et que les points réalisant le minimum sont forcément de la forme $x = (t, t, \dots, t)$.

b) Prouver que le point de minimum est unique si $A$ est suffisamment grand.

c) Si $A$ est suffisamment grand et $\tau$ suffisamment petit, prouver que la suite $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ définie par récurrence comme suit converge vers l'unique point de minimum : on initialise avec $x_i^{(0)} = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, puis on prend, pour $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} s^{(k)} &= \sum_{i=1}^n x_i^{(k)} \\ x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)}(1 - A\tau) - \tau\cos(s^{(k)}). \end{aligned}$$

**Solution :**

a) Soit $f(x) := \sin\left(sum_{i=1}^n x_i\right) + \frac{A}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2$. On a $f(x) \geq A||x|| - 1$. La fonction $f$ est une fonction continue telle que $\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = +\infty$. Elle admet donc un minimum. Au point de minimum on a $\nabla f(x) = 0$, donc, pour tout $i$,

$$Ax_i + \cos\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = 0.$$

Cela montre $x_i = t := -A^{-1}\cos\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$, donc $x = (t, t, \dots, t)$.

b) On peut chercher le minimum parmi les points de la forme $x = (t, t, \dots, t)$ et donc minimiser $g(t) := \sin(nt) + \frac{A}{2}nt^2$. Comme on a $g''(t) = -n^2\sin(nt) + An$, si $A > n$ on a $g''(t) > 0$ pour tout $t$, donc $g$ serait strictement convexe et auait donc un minimum unique.

c) On reconnaît l'algorithme du gradient à pas fixe $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau\nabla f(x^{(k)})$. Cet algorithme converge pour $\tau$ petit si $f$ est elliptique et $\nabla f$ est Lipschitzien. Cela correspond à dire qu'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que $\alpha I \leq D^2 f(x) \leq \beta I$, c'est-à-dire que la Hessienne est minorée et majorée par deux multiples positifs de la matrice identité (de manière équivalente, que ses valeurs propres sont bornées entre $\alpha$ et $\beta$. Comme on a $D^2 f(x) = AI + B$, où $B$ est une matrice avec des coefficients tous dans $[-1, 1]$, cela est vrai pour $A$ suffisamment grand.