
Contrôle de 2e session: durée 1h30.
Les documents de cours et de TD ne sont pas autorisés.
Attention : le barème dépasse largement 20 ; il n'est donc absolument pas nécessaire de traiter tous les exercices et il est conseillé de se concentrer sur trois d'entre eux.

Exercice 1 (4 points)**.** Énoncer précisement le théorème relatif aux multiplicateurs de Lagrange comme condition nécessaire d'optimalité pour des problèmes d'optimisation sous contraintes (extrema liés)

Solution :
Supposons que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ sont des fonctions C^1, avec $k < n$, et posons $E = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) = 0\}$. Supposons que x_0 est un minimum local de f sur E, et que la matrice $Dg(x_0)$ est de rang k. Alors on peut trouver des nombres $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tels que $\nabla f(x_0) = \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x_0)$, où les fonctions g_i sont les composantes de g.

Exercice 2 (6 points)**.** Considérer la fonction $X :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$X(u, v) = (\sin u, 2\cos u \sin v, 3\cos u \cos v).$$

a) Prouver que X définit une paramétrisation de la surface S définie par

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1,\ |x| < 1\}.$$

b) Cette paramétrisation est-elle injective ? régulière ?

c) Considérer la courbe $\gamma(t) := X(t, t)$ pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Dire s'il s'agit d'une courbe plane (suggestion : calculer le DL_3 de $\gamma(t)$ en $t = 0$).

Solution :

a) Il faut démontrer que l'image de X est S. Pour tout (u, v) on appelle (x, y, z) les trois composantes de $X(u, v)$, c'est-à-dire $(x, y, z) = (\sin u, 2\cos u \sin v, 3\cos u \cos v)$. On a bien $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ parce que

$$\begin{aligned}(\sin u)^2 + \frac{1}{4}(2\cos u \sin v)^2 + \frac{1}{9}(3\cos u \cos v)^2 &= (\sin u)^2 + (\cos u \sin v)^2 + (\cos u \cos v)^2 \\ &= (\sin u)^2 + (\cos u)^2((\sin v)^2 + (\cos v)^2) = (\sin u)^2 + (\cos u)^2 = 1.\end{aligned}$$

Cela prouve que l'image de X est contenue dans S. En prenant un point $(x, y, z) \in S$ on peut écrire x sous la forme $x = \sin u$ pour une valeur de $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (parce que $|x| < 1$ donc on peut se restreindre à l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Pour cette valeur de u on a $\cos u \neq 0$. On considère ensuite les nombres $\frac{y}{2\cos u}$ et $\frac{z}{3\cos u}$. Si on prouve que la somme de leurs carrés vaut 1 on pourra les écrire sous la forme $\sin v$ et $\cos v$ respectivement, et on aura prouvé ce que l'on souhaite. Il suffit donc de calculer

$$\left(\frac{y}{2\cos u}\right)^2 + \left(\frac{Z}{3\cos u}\right)^2 = \frac{y^2}{4(1-x^2)} + \frac{z^2}{9(1-x^2)} = 1,$$

où la dernière égalité vient du fait que l'on a $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 - x^2$.

b) Cette paramétrisation n'est pas injective parce que $X(u, v) = X(u, v + 2\pi)$. Elle est par contre régulière, parce que X est C^1 et que l'on a $X_u \wedge X_v \neq 0$. Pour le vérifier, on calcule

$$X_u = (\cos u, -2\sin u \sin v, -3\sin u \cos v), \quad X_v = (0, 2\cos u \cos v, -3\cos u \sin v).$$

La troisième composante de $X_u \wedge X_v$ est donnée par $2(\cos u)^2 \cos v$ et, sachant que l'on a $\cos u \neq 0$, ne s'annule que lorsque $\cos v = 0$. Dans ce cas, on aurait $X_u = (\cos u, \pm 2\cos u, 0)$ et $X_v = (0, 0, \pm 3\cos u)$. Ces deux vecteurs ne sont évidemment pas colinéaires parce que le deuxième est parallèle à l'axe z et le premier vit dans le plan xy, et ne sont pas nuls parce que $\cos u \neq 0$. Donc $X_u \wedge X_v \neq 0$.

c) Pour qu'une courbe γ dans $\mathbb{R}^3$ soit plane il faut que sa torsion soit nulle, donc que le déterminant de la matrice 3×3 dont les colonnes sont $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ soit 0. On écrit le DL_3 de $\gamma(t)$ en $t = 0$ et on obtient

$$\gamma(t) = \left(t - \frac{t^3}{6}, 2(1 - \frac{t^2}{2})(t - \frac{t^3}{6}), 3(1 - \frac{t^2}{2})(1 - \frac{t^2}{2})\right) + o(t^3) = (t - \frac{t^3}{6}, 2t - \frac{4}{3}t^3, 3 - 3t^2) + o(t^3).$$

Cela nous donne

$$\gamma'(0) = (1, 2, 0), \quad \gamma''(0) = (0, 0, -6), \quad \gamma'''(0) = (-1, -8, 0).$$

Or, on a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -8 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = -36 \neq 0,$$

donc la courbe γ n'est pas plane.

Exercice 3 (7 points)**.** Soient $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^1, strictement positives, chacune avec dérivée strictement positive en tout point. On considère la fonction $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(x, y) = e^{x+y}(\alpha(x), \beta(y)).$$

a) Prouver que Φ est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$.

b) Prouver que Φ est injective et que c'est donc un difféomorphisme global entre $\mathbb{R}^2$ et son image.

c) Trouver un exemple où l'on a $\Phi(\mathbb{R}^2) =]0, \infty[^2$ et un exemple où l'on a $\Phi(\mathbb{R}^2) \neq]0, \infty[^2$ en justifiant bien pourquoi l'image est ou n'est pas tout $]0, \infty[^2$.

d) **(Attention : difficile)** Prouver que l'on a toujours $\Phi(\mathbb{R}^2) = \{(x, y) \in]0, \infty[^2 : \frac{\inf \alpha}{\sup \beta} < \frac{x}{y} < \frac{\sup \alpha}{\inf \beta}\}$.

Solution :

a) La fonction Φ est C^1 parce que ses composantes le sont par produit de fonctions C^1. On calcule la matrice Jacobienne $D\Phi(x, y)$:

$$D\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y}(\alpha'(x) + \alpha(x)) & e^{x+y}\alpha(x) \\ e^{x+y}\beta(y) & e^{x+y}(\beta'(y) + \beta(y)) \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} \det(D\Phi(x, y)) &= e^{2(x+y)} \left((\alpha'(x) + \alpha(x))(\beta'(y) + \beta(y)) - \alpha(x)\beta(y)\right) \\ &= e^{2(x+y)} \left(\alpha'(x)\beta'(y) + \alpha'(x)\beta(y) + \alpha(x)\beta'(y)\right) > 0. \end{aligned}$$

Par le théorème d'inversitbilité locale Φ est donc un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$.

b) Si on prouve que Φ est injective c'est un difféomorphisme global entre $\mathbb{R}^2$ et son image par le théorème d'inversitbilité globale. Supposons $\Phi(x, y) = \Phi(x', y')$. Notons $S = x + y$ et $S' = x' + y'$. Si on avait $S > S'$, pour avoir égalité dans chaque composante on devrait avoir $\alpha(x) < \alpha(x')$ et $\beta(y) < \beta(y')$. Considérant que α et β sont strictement croissantes cela donnerait $x < x'$ et $y < y'$. Mais donc on aurait $S < S'$, ce qui est contradictoire. De même si on avait $S < S'$. Donc on a $S = S'$. Alors, pour avoir égalité dans chaque composante on doit avoir $\alpha(x) = \alpha(x')$ et $\beta(y) = \beta(y')$, ce qui implique $x = x'$ et $y = y'$. Donc Φ est injective.

c) Pour trouver un exemple où l'on a $\Phi(\mathbb{R}^2) =]0,\infty[^2$ on peut prendre $\alpha(x) = e^x$ et $\beta(y) = e^y$. Ces deux fonctions sont strictement posiitves et leurs dérivées aussi. On a $\Phi(x,y) = (e^{2x+y}, e^{x+2y})$. Soit $(x_0, y_0) \in]0,\infty[^2$; on veut écrire $(x_0,y_0) = \Phi(x,y)$ pour un certain (x,y). On peut sûrement écrire $x_0 = e^a, y_0 = e^b$ et résoudre le système 2×2

$$\begin{cases} 2x + y = a, \\ x + 2y = b \end{cases} \qquad (x,y) = (\frac{2a-b}{3}, \frac{2b-a}{3}).$$

Dans cet exemple, l'image de Φ est donc bien tout le quadrant $]0,\infty[^2$.
Prenons ensuite $\alpha(x) = 3 + \arctan(x)$ et $\beta(y) = 3 + \arctan(y)$. Comme on a $1 \leq 3 - \frac{\pi}{2} \leq \alpha, \beta \leq 3 + \frac{\pi}{2} \leq 5$ on a pour tout x, y l'inégalité $\frac{1}{25} \leq \frac{\alpha(x)}{\beta(y)} \leq 25$. Donc le ratio entre les deux composantes de $\Phi(x,y)$ est toujours borné entre ces deux constantes, et l'image de Φ ne peut donc pas être tout le quadrant $]0,\infty[^2$, parce que, par exemple, elle ne contient pas le point $(1, 100000)$.

d) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'ouvert donné par $\Omega := \{(x,y) \in]0,\infty[^2 : \frac{\inf \alpha}{\sup \beta} < \frac{x}{y} < \frac{\sup \alpha}{\inf \beta}\}$. Pour le même argument déjà vu à la question précédente on a clairement $\Phi(\mathbb{R}^2) \subset \Omega$. On veut montrer maintenant la surjectivité. On prouvera que l'ensemble $\Phi(\mathbb{R}^2)$ est en même temps ouvert et fermé dans Ω ce qui implique $\Phi(\mathbb{R}^2) = \Omega$ puisque Ω est connexe. Le fait que $\Phi(\mathbb{R}^2)$ est ouvert est une conséquence du théorème d'inversion locale. Pour la fermeture, soit $(a_0, b_0) \in \Omega$ un point tel qu'il existe une suite $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant $\Phi(x_n, y_n) \to (a_0, b_0)$. Il faut prouver $(a_0, b_0) \in \Phi(\mathbb{R}^2)$. Pour cela, il est suffisant de prouver que la suite (x_n, y_n) est bornée : il sera donc possible d'extraire une sous-suite (x_{n_k}, y_{n_k}) convergeant vers un point $(\bar{x}, \bar{y})$ et on aura $(a_0, b_0) = \Phi(\bar{x}, \bar{y})$. Or, supposons que (x_n, y_n) n'est pas bornée. On pourrait donc trouver une sous-suite (x_{n_k}, y_{n_k}) où chacune des composantes a une limite, et au moins une de ces deux limites ne serait pas finie. Supposons $x_{n_k} \to +\infty$ Si la limite de y_{n_k} n'est pas $-\infty$ alors on aurait $e^{x_{n_k} + y_{n_k}} \beta(y_{n_k}) \to +\infty$, ce qui est absurde, parce que cette limite devrait être égale à b_0. Donc, si une composante tend vers $+\infty$ l'autre tend vers $-\infty$. De même ; si une composante (disons x_{n_k}) tend vers $-\infty$ il est nécessaire que l'autre tende vers $+\infty$, sinon la limite de $e^{x_{n_k} + y_{n_k}} \beta(y_{n_k})$ serait 0, alors qu'on a $b_0 > 0$. Or, si on suppose $x_{n_k} \to +\infty, y_{n_k} \to -\infty$ on en déduirait que le ratio entre les deux composantes de $\Phi(x_{n_k}, y_{n_k})$ tendrait vers $\frac{\sup \alpha}{\inf \beta}$, alors qu'il doit aussi tendre vers $\frac{a_0}{b_0} < \frac{\sup \alpha}{\inf \beta}$, ce qui est une contradiction. De même, si on avait $x_{n_k} \to -\infty, y_{n_k} \to +\infty$ on trouverait que le ratio entre les deux composantes de $\Phi(x_{n_k}, y_{n_k})$ tendrait vers $\frac{\inf \alpha}{\sup \beta}$, alors qu'il doit aussi tendre vers $\frac{a_0}{b_0} > \frac{\inf \alpha}{\sup \beta}$, ce qui est à nouveau une conradiction. Donc (x_n, y_n) est bornée et $(a_0, b_0) \in \Phi(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 4 (9 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + x^4} + \frac{1}{2}y^2 + axy,$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

a) Calculer ∇f en tout point et la matrice hessienne de f en l'origine.

b) Prouver que f est convexe si et seulement si $a = 0$.

c) Si $a = 0$, prouver que f possède un seul point critique, l'origine, qui est aussi un minimiseur global.

d) Si $0 < |a| < 1$ prouver que f admet un minimum et possède trois points critiques dont un point selle et deux minimiseurs globaux.

e) Si $|a| \geq 1$ prouver que f possède un unique point critique, qui est un point selle, et que f n'admet donc pas de minimun.

f) Prouver que l'on a $\inf f = -\infty$ si $|a| > 1$ et $\inf f = 0$ si $|a| = 1$.

Solution :

a) On a

$$\nabla f(x,y) = (\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} + ay, y + ax)$$

ainsi que

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

(pour calculer la dérivée seconde de $\sqrt{1+x^4}$ par rapport à x il suffit de faire un DL_2).

b) La fonction f est C^2. Si $a \neq 0$ la matrice $D^2 f(0,0)$ n'est pas semi-définie positive, puisque son déterminant vaut $-a^2$. Donc f ne peut pas êtr convexe dans ce cas. Au contraire, si $a = 0$, la fonction f est la somme de deux fonctions convexes, la fonction $y \mapsto \frac{1}{2}y^2$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}$ (pour voir la convexité de cette dernière fontion il suffit de voir que c'est la composition de $x \mapsto x^2$, convexe et positive, et de $t \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}$, convexe et croissante sur $\mathbb{R}^+$, ou alors calculer la dérivée seconde).

c) Si $a = 0$, les points critiques de f sont caractérisés par les équations $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} = 0$ et $y = 0$, et seule l'origine en est solution. La fonction f étant convexe, tout point critique est un minimiseur global.

d) Si $0 < |a| < 1$ on a $f(x,y) \geq \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2 - |a||x||y| = \frac{|a|}{2}(|x| - |y|)^2 + \frac{(1-|a|)}{2}(|x|^2 + |y|^2) \geq \frac{(1-|a|)}{2}(|x|^2 + |y|^2)$. Cela prouve que la fonction f satisfait $\lim_{||(x,y)||\to\infty} f(x,y) = +\infty$, ce qui suffit pour prouver qu'elle admet un mimum (puisqu'elle est continue). Les points critiques sont solution de

$$\begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} + ay = 0 \\ y + ax = 0 \end{cases}$$

et, en remplaçant $y = -ax$ dans la première équation on trouve $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} = a^2 x$. La valeur $x = 0$ est solution (et correspond au point critique $(0,0)$). En divisant par x on trouve $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} = a^2$ et en prenant le carré $x^4 = a^4(1+x^4)$. Cela donne $x^4 = a^4/(1-a^4)$ (on rappelle $|a| < 1$, donc $1 - a^4 > 0$). Il y a deux solutions $x = \pm a/\sqrt[4]{1-a^4}$ (les points critiques sont donc $(\pm a/\sqrt[4]{1-a^4}, \mp a^2/\sqrt[4]{1-a^4})$). Par symétrie, ces deux derniers points donnent la même valeur de f. Le point $(0,0)$ ne peut pas être un point de minimum parce que la matrice $D^2 f(0,0)$ n'est pas semi-définie positive. L'origine est en effet un point selle (parce que le déterminant de $D^2 f(0,0)$ est négatif, donc une valeur propre est positive et l'autre négative). Les deux autres points sont forcément des minimiseurs globaux (parce qu'un minimisuer global existe, et ces deux points sont de même nature).

e) Si $|a| \geq 1$ le même calculs pour la recherche de points critiques, une fois divisé par x, ne donnent pas de solution, parce qu'on aurait $(1-a^4)x^4 \leq 0 < a^4$. Donc le seul point critique est l'origine. L'origine étant un point selle, f ne peut donc pas admettre de minimun.

f) On calcule $f(x, \pm x)$ pour $x \to +\infty$, en choisissant le signe de la deuxième composante comme étant opposé à celui de a. De cette manière on a $f(x, \pm x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} + (\frac{1}{2} - |a|)x^2$. Comme on a $\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} \leq \frac{1}{2}(1+x^2)$ il est clair que pour $|a| > 1$ cette quantité tend vers $-\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et on a donc $\inf f = -\infty$. Le cas $|a| = 1$ est un peu plus subtile. Tout d'abord on a $f(x,y) \geq 0$ puisqu'on peut écrire $f(x,y) \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - |x||y| = \frac{1}{2}(|x| - |y|)^2 \geq 0$. Cette fois-ci on a $f(x, \pm x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} - \frac{1}{2}x^2$ et on regarde la limite pour $x \to +\infty$ de

$$f(x, \pm x) = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1 + x^4 - x^4}{2(\sqrt{1+x^4} + x^2)} = \frac{1}{2(\sqrt{1+x^4} + x^2)},$$

qui vaut 0. On a donc $\inf f = 0$.