Polytech Paris-Sud
Vendredi 22 octobre 2010

Contrôle continu de Maths 1

Durée : 2h

Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (3 points) Énoncez le théorème des accroissements finis pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, où a et b sont des réels, $a < b$. Donnez en particulier les hypothèses appropriées sur f.

Exercice 2 (5 points) On définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + sin(x).$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse et justifiez brièvement votre réponse (toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte mais, si correcte, vous pouvez l'utiliser pour justifier les réponses aux autres questions).

(i) La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(ii) La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(iii) La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(iv) La fonction f^{-1} existe et elle est continue sur $\mathbb{R}$.

(v) La fonction f^{-1} existe et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (4 points) Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si} \quad x \in [0, 1[, \\ \ln(1 + x) & \text{si} \quad x \in]-1, 0[. \end{cases}$$

Vérifiez que f est de classe C^1 sur $]-1, 1[$.

Exercice 4 (5 points) On définit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x \ln(x) - (1 - x) \ln(1 - x) & \text{si} \quad x \in]0, 1[, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

1. Montrez que f est continue sur $[0, 1]$ (on pourra utiliser la relation $f(x) = f(1 - x)$ pour abréger la démonstration).
2. Montrez que f est dérivable sur $]0, 1[$ et n'est dérivable ni au point 0 ni au point 1.
3. Montrez que f atteint son maximum en un unique point que vous préciserez. Donnez la valeur de ce maximum.

Exercice 5 (6 points) Pour tout nombre réel $a > 0$, on définit la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = ax^3 + x + 1.$$

1. Montrez que pour tout $a > 0$, l'équation $f_a(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$ a une unique solution et que celle-ci est contenue dans l'intervalle $]-1, 0[$. On définit alors une fonction $z :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $a \in]0, +\infty[$, $f_a(z(a)) = 0$.
2. Montrez que pour tout $a > 0$,
$$-\frac{1}{\sqrt[3]{a}} < z(a).$$
Déduisez-en $\lim_{a \to +\infty} z(a)$.
3. Montrez que $\lim_{a \to +\infty} \sqrt[3]{a} z(a) = -1$.
4. Montrez que
$$\lim_{a \to 0^+} \frac{z(a) + 1}{a} = 1.$$
Indication : utilisez le théorème des accroissements finis.
Déduisez-en en particulier la valeur de $\lim_{a \to 0^+} z(a)$.