Université de Paris Sud 11 — **L2 – MPI**
Mathématiques — **Deuxième semestre 15/16**

Math203 – Analyse et Convergence II

Devoir maison 2

A rendre le 07 mars 2016

Exercice 1

A. Fonction Zeta

Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ et on note $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que la fonction ζ est bien définie sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer que, pour tout entier $r \geq 1$, la série de fonctions de terme général $f_n^{(r)}$ est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[\alpha_0,+\infty[$ avec $\alpha_0 > 1$.
3. En déduire que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. Montrer également qu'elle est décroissante et convexe sur le même intervalle.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x)$.
5. Montrer que l'on a pour tout $x > 1$
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt$$
puis en déduire un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque $x \longrightarrow 1^+$.

B. Fonction Theta

Pour $x \in]0,+\infty[$, on note $\Theta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. (Question plus difficile) Montrer que Θ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. (Indication : on pourra montrer que pour tout $\beta > 0$, il existe un entier n_β ne dépendant que de β tel que la suite $(|f_n'(x)|)_{n\geq n_\beta}$ soit décroissante en n pour tout $x \geq \beta$. Puis on en déduira que la série des dérivées $\sum_{n\geq1}(-1)^{n+1} f_n'$ converge uniformément sur $[\beta,+\infty[$.)
2. Montrer que l'on a
$$\frac{x}{(2n+2)^{x+1}} \leq \frac{x}{(2n+1)^{x+1}} \leq \frac{1}{(2n)^x} - \frac{1}{(2n+1)^x} \leq \frac{x}{(2n)^{x+1}}$$
et en déduire l'encadrement
$$\frac{x}{2^{x+1}}(\zeta(x+1)-1) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \leq \frac{x}{2^{x+1}}\zeta(x+1)\ .$$

Utiliser **A**.5 pour déduire de cet encadrement que $\Theta(x) \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ quand $x \longrightarrow 0^+$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice $(a_n)_{n\geq 1}$ désigne une suite décroissante de réels positifs et l est sa limite. On pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x).$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ pour que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$.
3. Soit $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k\geq n+1} u_k(x)$. Montrer que $l \leq \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} R_n(x) \leq a_{n+1}$.

   En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ pour que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
4. Déterminer une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ pour laquelle la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ mais pas normalement.