Calcul Différentiel et Analyse Complexe
Épreuve terminale, 22 mai 2019

Durée : 3h ; calculettes interdites ; seule une feuille A4 (recto-verso) de notes est autorisée ; composer chaque exercice sur une feuille distincte. Les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté ; le barème étant sur 27, il n'est pas obligatoire de tout traiter.

Exercice 1 (6 points)**.** Étant donnés des réels $\alpha, \beta > 0$, considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2|x|^\alpha |y|^\beta).$$

1. Prouver que f est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha, \beta > 1$.
2. Prouver que f est différentiable en $(0, 0)$ si et seulement si $\alpha + \beta > 1$.
3. Prouver que f est une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha, \beta \geq 2$.
4. En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, pour quelles valeurs de α et β la fonction f est-elle holomorphe sur $(\mathbb{R}_+)^2$?
5. Prouver que f n'est jamais holomorphe sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$.

Solution

1. Si $\alpha, \beta > 1$ les fonctions $x \mapsto |x|^\alpha$ et $y \mapsto |y|^\beta$ sont C^1, d'où f est C^1. Si un des deux exposant n'est pas plus grand que 1, alors la fonction f n'est pas différentiable sur certains points d'un axe. Par exemple, dans le cas $\alpha \leq 1$, on peut regarder $f(x, 1)$, dont la deuxième composante vaut $2|x|^\alpha$, qui n'est pas différentiable en $x = 0$.
2. On a $f(0, 0) = 0$. Si $\alpha + \beta > 1$ on a $f(x, y) = o(||(x, y)||)$, ce qui implique que f est différentiable en $(0, 0)$ avec différentielle nulle. Si $\alpha + \beta \leq 1$, on peut regarder $f(x, x)$, dont la deuxième composante vaut $2|x|^{\alpha+\beta}$ et n'est pas différentiable en $x = 0$.
3. Si $\alpha, \beta \geq 2$ les fonctions $x \mapsto |x|^\alpha$ et $y \mapsto |y|^\beta$ sont C^2, d'où f est C^2. Si un des deux exposant n'est pas au moins deux, alors la fonction f n'est pas C^2 si restrainte à des droites opportunes. Par exemple, dans le cas $\alpha < 2$, on peut regarder $f(x, 1)$, dont la deuxième composante vaut $2|x|^\alpha$, qui n'est pas une fonction C^2 au voisinage de 0.
4. Pour $\alpha = \beta = 1$ la fonction f coïncide, sur $(\mathbb{R}_+)^2$, avec $f(z) = z^2$ et elle est donc holomorphe. Ceci ne peut pas être vrai pour d'autres valeurs de α, β, sinon on aurait deux fonctions holomorphes (celle pour $\alpha = \beta = 1$ et l'autre) dont la partie réelle coïncide. Par différence, une fonction holomorphe avec partie réelle nulle. Ceci implique que cette fonction serait constante et, comme ces fonctions sont aussi continues sur tout $\mathbb{R}^2$ et nulles en $(0, 0)$, la différence serait nulle.
5. Comme dans la question précédente, si on avait $f(x, y) = x^2 - y^2, 2xy)$ alors f serait holomorphe. Ici on a changé de signe à la partie imaginaire, donc f est la conjuguée complexe d'une fonction holomorphe non-constante et n'est donc pas holomorphe.

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; f(x, y) = 1\}$, où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \frac{x^2+y^2}{3x^2+2y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1. Prouver que A est localement paramétrisable par une courbe régulière.
2. Faire un dessin schématique de l'ensemble A.
3. En considérant A comme un lacet dans $\mathbb{C}$, calculer l'indice du point $2i$ par rapport à A.

Solution

1. f est C^1 (au moins en déhors de l'origine, mais en fait même en l'origine) et on a, pour $(x, y) \neq 0$

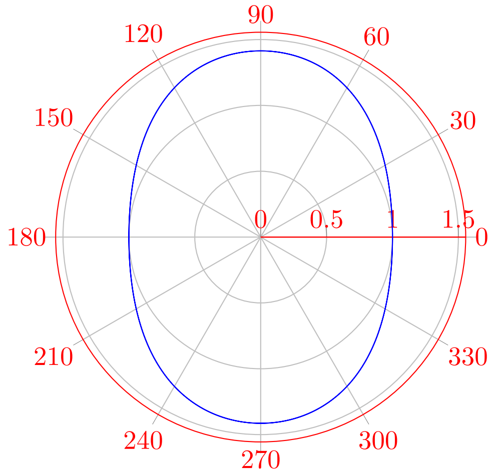
$$\nabla f(x, y) = (2x - \frac{2xy^4}{(3x^2 + 2y^2)^2}, y - \frac{3x^4 y}{(3x^2 + 2y^2)^2}).$$

L'oriine (où ce calcul ne marche pas) n'appartient sûrement pas à A. On regarde en quels points de A on a $\nabla f = 0$ On voit que $x = 0$ et $\nabla f(x, y) = 0$ implique $y = 0$, et de même $y = 0$ et $\nabla f(x, y) = 0$ implique $x = 0$. Comme on exclut l'origine, on peut supposer alors $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Le système $\nabla f(x, y) = 0$ devient donc

$$\begin{cases} (3x^2 + 2y^2)^2 = 3x^4 \\ (3x^2 + 2y^2)^2 = y^4. \end{cases}$$

Or, ce système n'a pas de solutions avec $x, y \neq 0$ car $(3x^2 + 2y^2)^2 > 9x^4 > 3x^4$. Donc le gradient de f ne s'annule pas sur A et le théorème des fonctions implicites nous garantit que A est localement le graphe d'une fonction régulière et donc paramétrable par une courbe régulière.

2. Voici un dessin cordonnées polaires. A noter qu'on peut écrire A de la manière suivante : $r^2 = (2+\cos^2(\theta))/(1+\cos^2(\theta)+cos^4(\theta))$.



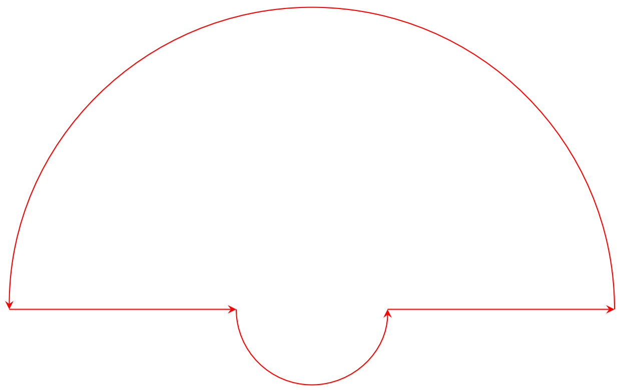
3. Le point $2i$ correspond à $(0,2)$ dans $\mathbb{R}^2$. On a $f(0,y) = y^2/2$, donc $f(0,2) > 1$ et $f(0,y) > 1$ pour tout $y > \sqrt{2}$. Donc $2i$ est dans la composante connexe non bornée du complémentaire de A. Son indice est donc 0.

Exercice 3 (8 points)**.** Soit $m \geq 1$ un entier impaire, et $a \geq 0$ un réel. On considère $I_{m,a} = \int_a^\infty \frac{\sin(x)}{x^m} dx$.

1. Justifier d'abord la convergence de l'intégrale impropre pour $a \geq 0, m = 1$, et pour $a > 0, m > 1$.
2. On considère le cas $m = 1, a = 0$. Établir que l'on a
$$2iI_{1,0} = \lim_{r \to +\infty} \int_{\{r^{-1} \leqslant |x| \leqslant r\}} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$
3. Dessiner le contour $\gamma = [-r, -r^{-1}] \cup \{r^{-1}e^{i\theta}, \pi \leq \theta \leq 2\pi\} \cup [r^{-1}, r] \cup \{re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ parcouru dans le sens direct.
4. Calculer $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz$ par la formule des résidus.
5. Montrer en utilisant $|e^{i(x+iy)}| \leqslant e^{-y}$ que l'intégrale $\int_{\{re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\}} \frac{e^{iz}}{z} dz$ tend vers 0 quand $r \to +\infty$.
6. Montrer que l'on a $\int_{\{r^{-1}e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\}} \frac{e^{iz}}{z} dz \to i\pi$ quand $r \to +\infty$.
7. Conclure en obtenant la valeur de $I_{1,0}$.
8. *(Question plus difficile)* En suivant des étapes similaires et en considérant le contour $\gamma = [-r, -a] \cup \{ae^{i\theta}, \pi \leq \theta \leq 2\pi\} \cup [a, r] \cup \{re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, prouver que l'on a, pour $m = 2k+1$:
$$I_{m,a} = \frac{\pi(-1)^k}{2(2k)!} - \sum_{j\,:\,k+j \geq 0} \frac{(-1)^{k+j} a^{2j+1}}{(2j+1)(2k+2j+1)!}.$$

Solution

1. Pour $m > 1$ l'intégrale converge en l'infini, mais diverge en 0 parce que $\sin(x)/x^m \approx x^{1-m}$, d'où la restriction $a > 0$. Pour $m = 1$ il n'y a pas de divergence en 0, mais la fonction n'est pas intégrable en valeur absolue en l'infinie. Pourtant, $\int_1^M \sin(x)/x dx = \int_1^M \cos(x)/x^2 dx + [\sin(x)/x]_{x=1}^{x=M}$ par IPP, ce qui montre que la limite pour $M \to \infty$ de l'intégrale existe et est finie (la première intégrale étan convergeante, le terme de bord en M tendant vers 0).
2. On a $I_{1,0} = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx$. Il suffit de voir que $\int_0^\infty \frac{-e^{-ix}}{x} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx$ et ensuite écrire ces intégrales comme une limite en 0 et en ∞.
3. Voilà



4. En écrivant $e^{iz}=\sum_{neq0} i^n z^n/n!$, on voit que le résidu de e^{iz}/z en $z=0$ est 1, donc $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = 2\pi i$.
5. On a $\int_{\{re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]\}} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_0^\pi e^{ir\cos(\theta)-r\sin\theta} i d\theta$, donc l'intégrale qu'on doit estimer est bornée par $\int_0^\pi e^{-r\sin\theta}d\theta$. La fonction intégrande tend simplement vers 0 p.p. et est dominée par la constante 1, son intégrale tend alors vers 0. Pour justifier la même chose sans utiliser la convergence dominée, il suffit de fixer $\varepsilon>0$ et voir que l'intégrande converge uniformément vers 0 sur $[\varepsilon,\pi-\varepsilon]$ et qu'elle est plus petite que 1 partout. La limsup de cette intégrale est dond plus petite que 2ε, pour ε arbitraire.
6. On écrit $e^{iz}=1+zh(z)$, avec h holomorphe bornée au voisinage de 0. On a donc
$$\int_{\{r^{-1}e^{i\theta},\theta\in[\pi,2\pi]\}} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{\{r^{-1}e^{i\theta},\theta\in[\pi,2\pi]\}} \left(\frac{1}{z}+h(z)\right)dz.$$
On a $|\int_{\{r^{-1}e^{i\theta},\theta\in[\pi,2\pi]\}} h(z)dz| \leq (\sup_{B(0,1)}|h|)\pi r^{-1}\to 0$, et l'intégrale de $1/z$ se calcule explicitement puisque
$$\int_{\{r^{-1}e^{i\theta},\theta\in[\pi,2\pi]\}} \frac{1}{z}dz = \int_\pi^{2\pi} re^{-i\theta} ir^1 e^{i\theta}d\theta = i\pi.$$
7. On déduit donc que $2iI_{1,0}+0+\pi i = 2\pi i$, d'où $I_{1,0}=\pi/2$.
8. Les étapes à suivre sont les mêmes mais
   — Le résidu de $z^{-m}\sum_{n\neq 0} i^n z^n/n!$ s'obtient en prenant $n=m-1$, et il vaut donc $i^{m-1}/(m-1)!$.
   — Il est plus facile de voir maintenant que $\int_{\{re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]\}} \frac{e^{iz}}{z^m}dz$ tend vers 0, parce qu'on l'estime avec $r^{1-m}\int_0^\pi e^{-r\sin\theta}d\theta$.
   — On ne peut pas faire un calcul asymptotique pour l'intégrale $\int_{\{ae^{i\theta},\theta\in[\pi,2\pi]\}} \frac{e^{iz}}{z^m}dz$ puisque a est maintenant fixé. En utilisant la corvergence uniforme de la série de l'exponentielle on a
   $$\int_{\{ae^{i\theta},\theta\in[\pi,2\pi]\}} \frac{e^{iz}}{z^m}dz = \sum_{n\geq 0}\int_\pi^{2\pi} \frac{i^n a^n e^{in\theta}}{a^m e^{im\theta}} iae^{i\theta}d\theta = \sum_{n\geq 0}\frac{i^{n+1}a^{n+1-m}}{n!}\int_\pi^{2\pi} e^{i(n+1-m)\theta}d\theta.$$
   Pour calculer les intégrales dans la série, on distingue deux cas, $n=m-1$, où l'intégrande est constante. Pour cette valeur de n on a $\int_\pi^{2\pi} e^{i(n+1-m)\theta}d\theta = \pi$. Pour les autres aleurs de n, on a
   $$\int_\pi^{2\pi} e^{i(n+1-m)\theta}d\theta = \frac{1}{i(n+1-m)}\left[e^{i(n+1-m)\theta}\right]_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi}.$$
   On voit que le terme de bord s'annule si $n+1-m$ est paire, donc on considère juste le cas $n=m+2j$, $j\in\mathbb{Z}$. Dans ce cas on a $\int_\pi^{2\pi} e^{i(n+1-m)\theta}d\theta = \frac{2}{i(n+1-m)}$. On obtient alors
   $$2iI_{m,a}+0+\pi\frac{i^m}{(m-1)!}+\sum_{n\geq 0, n=m+2j}\frac{2i^{n+1}a^{n+1-m}}{i(n+1-m)n!} = \frac{2\pi i^m}{(m-1)!}.$$
   Réarrangeant cette expression et posant $m=2k+1$ on obtient ce que l'on cherche.

Exercice 4 (8 points). **Soit** $\Omega\subset\mathbb{C}$ un ouvert et $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui vérifie l'implication suivante $f(z)\in\mathbb{R}\Rightarrow f(z)>0$.

1. Prouver qu'il existe une fonction holomorphe g telle que $f=e^g$ et qu'on peut choisir g telle que $|\mathrm{Im}(g)|<\pi$.
2. Prouver que e^{ig} est une fonction holomorphe bornée. En déduire, si $\Omega=\mathbb{C}$, que f est constante.
3. Prouver que, pour tout lacet γ contenu dans Ω, on a $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=0$.
4. Supposons $\Omega=B(0,1)\setminus\{0\}$. Prouver que 0 est soit une singularité artificielle de f, soit une singularité essentielle, mais pas un pôle.
5. Dans le cas d'une singularité artificielle, on appelle $\tilde f$ l'extension holomorphe de f à $B(0,1)$: prouver $\tilde f(0)\neq 0$.
6. Peut-on avoir $\tilde f(0)\in\mathbb{R}$ avec $\tilde f(0)<0$?
7. Supposons $\Omega=\mathbb{C}\setminus\overline{B(0,1)}$ et $|f(z)|\leq C|z|^m$. Démontrer que f est bornée.
8. Peut-on dire que f est constante, alors ? (pour répondre "non" il faut trouver un exemple de fonction f non-constante définie sur cet ouvert Ω et satisfaisant la condition $f(z)\in\mathbb{R}\Rightarrow f(z)>0$).

Solution

1. On prend lz détermination principale du logarithme d'un nombre complexe $\log z := \log|z| + i\arg(z)$ (où $\arg(z)$ est l'argument de z, c'est-à-dire l'angle que z fait avec l'axe réel positif, pris dans $]-\pi,\pi[$). C'est une fonction bien définie sur $\mathbb{C}$ privé de la demi-droite négative. C'est une fonction holomorphe par inversion de l'exponentielle. On peut prendre donc $g=\log(f)$.

2. En utilisant $|e^{iz}| = e^{\mathrm{Re}(iz)} = e^{-\mathrm{Im}(z)}$ on trouve $|e^{ig}| \leq e^{\pi}$. La fonction e^{ig} est alors holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$, donc constante (Liouville). On en déduit que g et f sont constantes aussi. Pour déduire que g est constante il y a deux possibilités : soit on dérive e^{ig}, ce qui donne $ig'e^{ig}$ et montre $g' = 0$, soit on note qu'on devrait avoir $g = c + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et, par continuité de g et connexion de $\mathbb{C}$, on a $k = const$.
3. $f = e^g$ implique $f' = e^g g' = fg'$, donc $g' = f'/f$. La fonction f'/f admet donc une prmitive, et ses intégrales sur les lacets sont nulles. Attention, le seul fait que f'/f est holomorphe (ce qui est vrai, puisque $f \neq 0$) ne suffit pas : le théorème qui dit que l'intégrale de toute fonction holomorphe sur un lacet est nulle demande comme hypothèse que l'intérieur du lacet soit inclus dans Ω, ce qui n'est pas forcement le cas ici. Autre erreur commune : on n'est plus en train de supposer $\Omega = \mathbb{C}$, donc vous ne pouvez pas supposer f constante.
4. Supposons que 0 soit un pole. Alors on a $f(z) = z^{-m}h(z)$, avec h holomoprhe telle que $h(0) \neq 0$. On trouve $f'/f = h'/h - m/z$ et le résidu de f'/f en 0 est donc $-m$. Alors on aurait, prenant pour γ un cercle autour de l'origine parcouru en sens direct, $\int_\gamma f'(z)/f(z)dz = -2\pi i m$. Pourtant cette intégrale s'annule, donc on trouve $m = 0$, ce qui signifie que f n'aurait pas de pôle en 0.
5. Si $\tilde{f}(0) = 0$ on aurait $f(z) = z^m h(z)$ pour $m > 0$. Le même calcul d'intégrale donne une contradiction.
6. Si $\tilde{f}(0)$ est dans la demi-droite négative, cela signifie qu'un point de type $t < 0$ est dans l'image de $\tilde{f}$. Or, cette image est ouverte (sauf si $\tilde{f}$ est constante, ce qui impliquerait $f = t < 0$, ce qui est absurde), donc d'autres points de ce type seraient dans l'image de $\tilde{f}$. Puisque l'image de $\tilde{f}$ est celle de f avec en plus $\tilde{f}(0)$, on trouverait de points de la demi-droite négative dans l'image de f, ce qui est une contradiction.
7. Prenons $g(z) = f(1/z)$. La fonction g serait holomorphe sur $B(0,1) \setminus \{0\}$, avec $|g(z)| \leq C|z|^{-m}$. Donc on a $g(z) = z^{-m}h(z)$ avec h holomorphe bornée. Quitte à changer m, on peut supposer que h ne s'annule pas, mais, sauf pour $m = 0$, on trouverait un pôle en 0, ce qui est une contradiction. Alors $m = 0$ et g, et donc f, est bornée.
8. On ne peut pas invoquer le théorème de Liouville, parce que $\Omega \neq \mathbb{C}$. Il est peut-être possible que f ne soit pas forcement constante, alors, mais il faut trouver un exemple. Le voilà : $f(z) = 1/z + 2$. Cette fonction prend des valeurs dans $B(2,1)$, qui est disjoint de la demi-droite négative.