M2 MFA - EDPCS & AAG

—

Équations Elliptiques et Calcul des Variations

—

Examen de première session, 19 janvier 2015

Durée : 3h, tout document est autorisé

Exercice 1 (5 points). Trouver les solutions des deux problèmes de calcul des variations suivants

$$(1) \qquad \min\left\{\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}|u'(t)|^2+\cos(t)u(t)\right)dt+u(\pi)\ :\ u\in H^1([0,\pi]),\, u(0)=0\right\}$$

$$(2) \qquad \min\left\{\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}|u'(t)|^2+\cos(t)u(t)\right)dt+u\left(\frac{\pi}{2}\right)\ :\ u\in H^1([0,\pi]),\, u(0)=0\right\}.$$

Exercice 2 (4 points). Soit u une fonction harmonique sur l'ouvert $\Omega:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>0\}$. Supposant u bornée, prouver qu'il existe une constante C (laquelle ?) telle que $|\nabla u(x,y)|\leq\frac{C}{|x|}$.

Exercice 3 (4 points). Soit $u\in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ une solution faible de $\Delta u=\sqrt{1+|\nabla u|^2}$. Prouver $u\in C^\infty$.

Exercice 4 (7 points). Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un domaine ouvert borné.

1. Prouver que la fonctionnelle $F:L^1(\Omega)\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ donnée par
$$F(u):=\log\left(\int_\Omega e^{u(x)}dx\right)$$
est bien définie et convexe.
2. Prouver que le problème d'optimisation
$$(\mathrm{P}) \qquad \min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u(x)|^2dx+F(u)\ :\ u\in H^1_0(\Omega)\right\}$$
admet une solution, et qu'elle est unique.
3. Prouver que la solution u du problème (P) satisfait $u\leq 0$.
4. Écrire l'équation d'Euler-Lagrange de (P), et prouver que la solution est C^∞ à l'intérieur de Ω.

Exercice 5 (7 points). Soit $B(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^N$ et $u\in H^1_0(B(0,1))\cap C^0(\overline{B(0,1)})$ une solution faible de $\Delta u=f(u)$ où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est C^1 et telle que $f,f'<0$.

1. Prouver $u\in C^{2,\alpha}(B(0,1))$ (pour tout $\alpha<1$) et $u>0$ dans $B(0,1)$.
2. En supposant $u\in C^1(\overline{B(0,1)})$, prouver $|\nabla u(x)|+\frac{1}{N}f(0)\geq 0$ pour tout $x\in\partial B(0,1)$.
3. Prouver $|\nabla u(x)|+\frac{|x|}{N}f(u(x))\geq 0$ pour tout x, avec inégalité stricte en dehors de $x=0$.
4. Prouver $u\in C^{2,\alpha}(\overline{B(0,1)})$.