Université de Paris Sud 11 — **L2 – Math203**
Mathématiques — **2ème semestre 12/13**

Examen du 22 mai 2013

Durée: 2 heures. Documents et calculettes interdits.

Question de cours.— Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ on a :

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{1}{2} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]}\cdot$$

Exercice 1.— **A.** Soit f la fonction 2π-périodique et impaire définie par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ si $x \in]0, \pi]$ et $f(0) = 0$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur $[-3\pi, 3\pi]$ (on ne demande aucun calcul).
2. Déterminer $f(x)$ pour $x \in [-\pi, 0[$, et montrer que $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ si $x \in [\pi, 2\pi[$.
3. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}\cdot$ On citera avec précision le résultat de cours utilisé.

B. Soit maintenant g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$.

1. Montrer que g est 2π-périodique et paire.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x+1)\cos(nx)dx = \int_{-1}^{2\pi-1} f(x+1)\cos(nx)dx = \int_0^{2\pi} f(u)\cos(nu - n)du.$
3. Compléter la formule suivante $\cos(a-b) - \cos(a+b) = \ldots.$
4. Utiliser ce qui précède pour calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de g.
5. Que dit le théorème de Parseval pour la fonction g?

C. 1. Déterminer $g(x)$ pour $x \in [0, 2\pi[$. On pourra considérer séparément les cas $x \in [0,1]$, $x \in [1, 2\pi - 1]$ et $x \in [2\pi - 1, 2\pi[$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)^2 dx$.
3. En utilisant ce qui précède, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

Exercice 2.— On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que la fonction F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et donner $F'(x)$.
3. Pour $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, calculer $\displaystyle\int_0^{T} \frac{1}{(1+u)(1+ux^2)} du$.

On pourra écrire $\dfrac{1}{(1+u)(1+ux^2)} = \dfrac{a}{1+u} + \dfrac{b}{1+ux^2}$ pour des constantes a et b à déterminer.

4. Pour $x \neq 1$, donner l'expression de $F'(x)$ avec des fonctions usuelles. Que vaut $F'(1)$?