Examen du 23 juin 2014

Durée: 2 heures. Documents et calculettes interdits.

Exercice 1.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction périodique de période 2π, définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
3. Citer le théorème de Dirichlet et montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
4. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4}$ et de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2.— Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer f_n' et montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note S sa somme.
4. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$?
5. Montrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$.
6. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

a) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On note U sa somme.

b) Montrer que U est dérivable. Que vaut $U'(x)$?

Exercice 3.— On considère les fonctions F et G données par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

1. Montrer que F et G sont bien définies sur $\mathbb{R}^+$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, exprimer $G(x)$ à l'aide de $F(x^2)$.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Donner une expression de $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale à paramètre.
4. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) - F'(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.
5. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $H(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$. Après avoir justifié brièvement que H est de classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$, déduire de la question précédente une expression de $F(x)$ puis de $G(x)$ en fonction de $H(x)$ pour $x \geq 0$.