Université de Paris Sud 11 **L2 – Math203**
Mathématiques **2ème semestre 13/14**

Examen du 20 mai 2014

Durée: 2 heures. Documents et calculettes interdits.
On citera soigneusement les résultats du cours que l'on utilise.

Exercice 1.— Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
3. Montrer que la série de Fourier de f converge simplement, et donner sa somme.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}\cdot$ En déduire aussi la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}\cdot$

Exercice 2.— On considère la fonction F donnée par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \arctan(t) dt \, .$$

1. Montrer que F est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Pour $x > 0$, on note $G(x) = xF(x)$. Montrer que $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \, dt$.
3. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, et que
$$\forall x > 0, \;\; xF''(x) + 2F'(x) + xF(x) = 1/x.$$

Exercice 3.— Soit φ la fonction 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, définie par $\varphi(x) = 1 - \dfrac{x}{\pi}$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels $c_k(\varphi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. On note $D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ et $\Delta_n(x) = \displaystyle\int_0^x D_n(y)dy$. Montrer que $\Delta_n(x) = \pi S_n(\varphi)(x) + x$, où $S_n(\varphi)$ désigne la n-ième somme partielle de la série de Fourier de φ.
3. Montrer, comme dans le cours, que $D_n(x) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$ si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(x) = 2n+1$ sinon.
4. En déduire l'égalité
$$\Delta_n(\frac{2\pi}{2n+1}) = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{(2n+1)\sin\frac{u}{2n+1}} du.$$
5. Justifier que
$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_n(\frac{2\pi}{2n+1}) = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$
6. En déduire que, lorsque $n \to +\infty$,
$$(S_n(\varphi) - \varphi)(\frac{2\pi}{2n+1}) \to \frac{2}{\pi} I - 1, \quad \text{où } I = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$
7. Sachant que $\frac{2}{\pi} I$ vaut approximativement 1,179, discuter de la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de φ.