ENSAE 2010/2011 - 2A SEMESTRE 2

—

EXAMEN SESSION 1

—

Optimisation Dynamique

2h, sans documents, calculatrice non autorisée
Ce sujet se compose d'une seule page

Exercice 1 (7 points)**.** Soit $x_0 > 0$ fixé. Résoudre soigneusement le problème d'optimisation suivant (en déterminant la polytique optimale si elle existe, la valeur du problème et les fonctions valeur si nécessaire et en justifiant tout ce qui est opportun justifer)

$$\sup\Big\{f(x_0,x_1)+g(x_1,x_2)+h(x_2,x_3)+i(x_3,x_4),\, x_{i+1}\in\Gamma_i(x_i),\, i=0,1,2,3\Big\}$$

où les paiements f, g, h et i et les correspondances $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ et Γ_3 sont définis par

$$f(x_0,x_1)=2x_0-2x_0x_1-10x_1,\quad g(x_1,x_2)=-3x_1^3-9x_1^2+\tfrac{x_2}{x_1+1}-3,$$
$$h(x_2,x_3)=3\sqrt{x_2}x_3,\qquad i(x_3,x_4)=3x_3x_4-2x_4^{3/2}-2x_3^3,$$
$$\Gamma_0(x_0)=[2x_0,3x_0+1],\ \Gamma_1(x_1)=[1,(x_1+1)^4],\ \Gamma_2(x_2)=[1,x_2+1],\ \Gamma_3(x_3)=[0,2x_3^2+1].$$

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer le problème d'optimisation dynamique en horizon infini

$$\min\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k|x_k-x_{k+1}^2|,\quad x_0=x\in[-2,2],\ x_k\in[-2,2].$$

Écrire l'équation de Bellmann satisfaite par la fonction valeur $v(x)$ de ce problème, trouver la solution de l'équation et la politique optimale (une suite $(x_k)_k$ qui dépendra du point de départ x, évidemment). Déterminer également toutes les suites constantes ($x_k = x$ pour tout k) qui sont optimales.

Exercice 3 (5 points)**.** Résoudre le problème

$$\min\{J(f):=\int_0^\pi\left[\frac{1}{2}f'(t)^2-\sin(t)f(t)\right]dt\,;\ f\in\mathcal{A}\},$$

où

$$\mathcal{A}:=\{f\in C^1([0,\pi])\ :\ f(0)=f(\pi)=0\}.$$

Indiquer la valeur minimale de J sur $\mathcal{A}$ ainsi que la ou les fonctions f la réalisant, en prouvant qu'il s'agit bien d'un minimiseur.

Exercice 4 (7 points)**.** Considérer le problème de contrôle suivant

$$\min\int_0^T[2x(t)-3u(t)-u^2(t)]dt\quad:\quad x'(t)=x(t)+u(t),\ 0\le u(t)\le 2,\ t\in[0,T],\ x(0)=5.$$

a) Ecrire l'Hamiltonien du système et le système Hamiltonien résolu par (x,p).
b) Trouver la solution de ce système dans le cas $T < \ln 7$. La courbe $x(t)$ est alors un candidat à l'optimisation. Préciser le contrôle u qui lui correspond.
c) Écrire l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman associée au problème (celle qui est satisfaite par la fonction valeur) et deviner une solution de cette équation en utilisant les résultats trouvés à la question b) pour calculer un candidat solution.
d) Justifier que la courbe x est vraiment l'optimum, en s'appuyant sur les résultats vu en cours et sur les réponses aux questions précédentes.