ENSAE 2011/2012 - 2A SEMESTRE 2

—

EXAMEN SESSION 1

—

Optimisation Dynamique

2h, sans documents, calculatrice non autorisée
Ce sujet se compose d'une seule page

Exercice 1 (6 points)**.** Trouver la solution au problème d'optimisation suivant :

$$\min \quad \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) \; : \; x_0 = x \in \mathbb{R}, \; x_{t+1} \in [-1 - x_t^2, 1 + x_t^2],$$

dans le cas $T = 3$ et

$$V_0(x,) = xy, \quad V_1(x,y) = 12x^3y - y^3, \quad V_2(x,y) = x^3 + 2x^2y - y^2.$$

Exercice 2 (7 points)**.** Considérer l'équation de Bellmann

$$v(x) = \sup\{\arctan(x+y) + \beta v(y) \; : \; y \in \Gamma(x)\},$$

où $\beta \in]0,1[$ est un paramètre fixé et l'inconnue est une fonction $v = \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Dans le cas $\Gamma(x) = [0, x]$ démontrer qu'il existe une et une seule solution dans l'espace des fonctions bornées sur $\mathbb{R}_+$. Cette solution est-elle continue ? monotone ?

Considérer également le cas $\Gamma(x) = [x, 2x]$ et répondre aux mêmes questions.

Trouver explicitement la solution dans le premier de ces deux cas.

Exercice 3 (6 points)**.** Résoudre le problème

$$\min\{J(f) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2}f'(t)^2 + tf(t) + \frac{1}{2}f(t)^2\right] dt\, ; \; f \in \mathcal{A}\}, \quad \text{où} \quad \mathcal{A} := \{f \in C^1([0,1]) \; : \; f(0) = 0\}.$$

Indiquer la valeur minimale de J sur $\mathcal{A}$ ainsi que la ou les fonctions f la réalisant, en prouvant qu'il s'agit bien d'un minimiseur (si besoin, considérer $y(t) = x(t) + t$ pour résoudre l'équation d'Euler-Lagrange).

Exercice 4 (5 points)**.** Considérer le problème de contrôle suivant

$$\max \int_0^T \left(x(t)u(t) - \frac{1}{2}u(t)^2\right) dt + x(T) \quad : \quad x'(t) = x(t) + u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad x(0) = x_0.$$

a) Ecrire l'Hamiltonien du système et le système Hamiltonien résolu par (x, p).

b) Trouver la seule solution de ce système. La courbe $x(t)$ est alors un candidat à l'optimisation. Préciser le contrôle u qui lui correspond.

c) Écrire l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman associée au problème.

On ne calculera pas la solution de cette équation, et on ne justifiera pas non plus l'optimalité de la trajectoire et du contrôle qu'on vient de calculer.